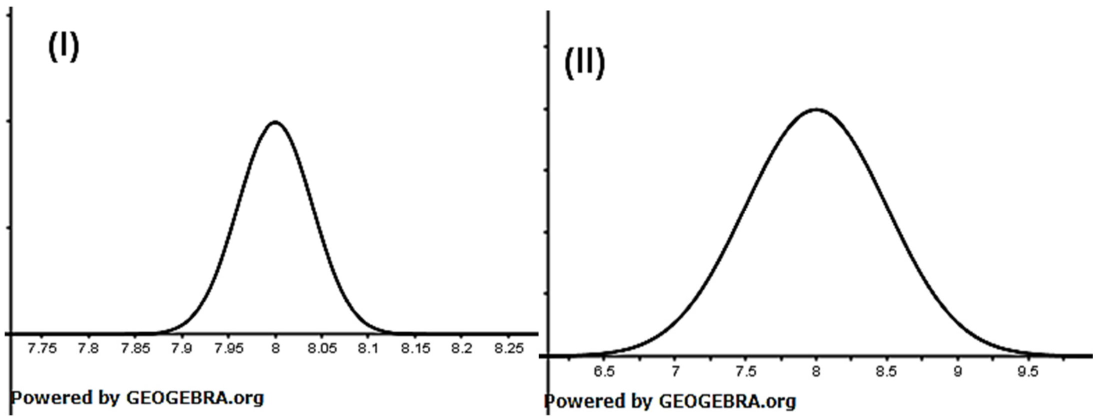
Abitur Leistungskurs Wahlteil Stochastik 2022 BW

Aufgabe C1

Ein Onlineshop bietet Patronen mit schwarzer Tinte und Patronen mit farbiger Tinte an.

a) Erfahrungsgemäß beträgt der Verkaufsanteil der Patronen mit schwarzer Tinte $65\,\%$. Betrachtet wird eine zufällige Auswahl von 100 verkauften Patronen.
Es wird davon ausgegangen, dass dabei die Anzahl der Patronen mit schwarzer Tinte binomialverteilt ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: „Genau 66 der verkauften Patronen sind mit schwarzer Tinte gefüllt."
B: „Die Anzahl der verkauften Patronen mit schwarzer Tinte weicht um mehr als $10\,\%$ vom Erwartungswert dieser Anzahl ab."

b) Im Folgenden werden nur Patronen betrachtet, die mit schwarzer Tinte gefüllt sind. Die Füllmenge einer solchen Patrone wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert $8\,ml$ und der Standardabweichung $0{,}04\,ml$ angenommen.
Eine der beiden Abbildungen zeigt den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion.

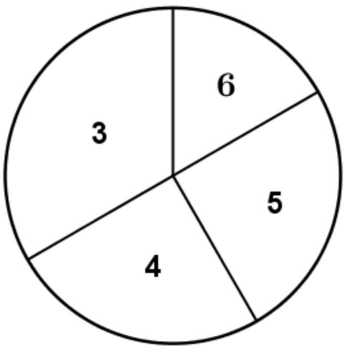


Geben Sie die Abbildung an, die den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion nicht zeigt, und begründen Sie Ihre Angabe.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Patrone weniger als $7{,}95\,ml$ Tinte enthält.
Betrachtet wird das Ereignis, dass eine zufällig ausgewählte Patrone zwischen $7{,}98\,ml$ und $8{,}04\,ml$ Tinte enthält. Geben Sie ein anderes Ereignis im Sachzusammenhang an, welches exakt dieselbe Wahrscheinlichkeit hat.
Bestimmen Sie das kleinste Intervall $[a;b]$, so dass die Füllmenge einer zufällig ausgewählten Patrone mit einer Wahrscheinlichkeit von $92\,\%$ in $[a;b]$ liegt.

c) Betrachtet wird die für $x \geq 0$ definierte Funktion f mit $f(x) = 0{,}25 \cdot e^{-0{,}25x}$.
Weisen Sie nach, dass f eine Dichtefunktion über ihrem Definitionsbereich ist.
Die Zeitdauer in Stunden zwischen dem Eingang einer Bestellung im Onlineshop und dem Versand der Ware kann modellhaft durch eine stetige Zufallsgröße mit der Dichtefunktion f beschrieben werden.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von $85\ \%$ wird eine Ware innerhalb von t Stunden nach Eingang der Bestellung versandt. Bestimmen Sie den Wert von t.

Aufgabe C2

Beim einmaligen Drehen des abgebildeten Glücksrads erhält man eine von vier möglichen Punktzahlen. Die Tabelle gibt für jede Punktzahl die zugehörige Wahrscheinlichkeit an.



Punktzahl	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

a) Zehn Personen drehen das Glücksrad jeweils einmal. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: „Genau zwei Personen erzielen jeweils die Punktzahl 4."
B: „Mindestens drei Personen erzielen jeweils eine Punktzahl, die kleiner als 5 ist."
C: „Die Summe der erzielten Punktzahlen aller zehn Personen ist höchstens 31."

b) Mehrere Spieler verwenden das Glücksrad bei einem Spiel mit folgenden Regeln:
- Jeder Spieler dreht das Glücksrad einmal.
- Der Spieler mit der größten erzielten Punktzahl gewinnt.
- Erzielen mehrere Spieler diese größte Punktzahl, so gewinnt derjenige von ihnen, der als letzter gedreht hat.

Achim ist der erste Spieler und erzielt die Punktzahl 5.
Beschreiben Sie, bei welchem weiteren Spielverlauf Achim gewinnt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass Achim das Spiel gewinnt, ist kleiner als $2\ \%$. Bestimmen Sie die Mindestanzahl der Spieler.

c) Ein Spieler vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für die Punktzahl 3 bei dem vorliegenden Glücksrad nicht $\frac{1}{3}$ ist. Daher soll ein einseitiger Hypothesentest mit einer Stichprobe von 100 Drehungen auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ durchgeführt werden. Dabei soll möglichst vermieden werden, dass irrtümlich von einer zu hohen Wahrscheinlichkeit für die Punktzahl 3 ausgegangen wird.
Der Spieler entscheidet sich für die folgende Nullhypothese:
„Die Wahrscheinlichkeit für die Punktzahl 3 beträgt höchstens $\frac{1}{3}$."
Beurteilen Sie, ob dieser Test der genannten Zielsetzung entspricht.
Formulieren sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang.
Beim durchgeführten Test ergibt sich der Ablehnungsbereich $A = \{42; \dots; 100\}$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für die Punktzahl 3 tatsächlich $40\,\%$ beträgt.

Lösungslogik C1

a) *Wahrscheinlichkeit für genau 66 verkaufte Patronen mit schwarzer Tinte:*
Gesucht ist binomialverteilte Wahrscheinlichkeit $B_{100;0,65}(X = 66)$.
Wahrscheinlichkeit dass Anzahl Patronen mit schwarzer Tinte um mehr als 10 % vom Erwartungswert abweicht.
Wir berechnen zunächst den Erwartungswert aus $\mu = n \cdot p$ und danach die binomialverteilte Wahrscheinlichkeit $B_{100;0,65}(X < 0{,}9\mu) + B_{100;0,65}(X > 1{,}1\mu)$.

b) *Zuordnung eines Graphen zur Dichtefunktion:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Wahrscheinlichkeit zufällig ausgewählte Patrone mit weniger als $7{,}95\,ml$ Tinte:
Berechnung mittels WTR über *normalcdf* mit lower-bound $-\infty$ und upper-bound $7{,}95$.
Anderes Ereignis mit derselben Wahrscheinlichkeit wie Patroneninhalt zwischen $7{,}98\,ml$ und $8{,}04\,ml$:
Siehe Klausuraufschrieb.
Kleinstes Intervall $[a; b]$, so dass Füllmenge einer zufällig ausgewählten Patrone mit einer Wahrscheinlichkeit von $92\,\%$ in $[a; b]$ liegt:
Gesucht ist z für normalverteilte Wahrscheinlichkeit $P(8 - z \le X \le 8 + z) = 0{,}92$.

c) *Nachweis, dass f eine Dichtefunktion über ihrem Definitionsbereich ist:*
Es ist zu prüfen dass:
1. $f(x) \ge 0$ für $x \ge 0$ und
2. $\lim\limits_{u \to \infty} \int_0^u f(x)\,dx = 1$ ist.

Klausuraufschrieb C1

a) *Wahrscheinlichkeit für genau 66 verkaufte Patronen mit schwarzer Tinte:*

$P(A) = B_{100;0,65}(X = 66) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0,08214$

Wahrscheinlichkeit dass Anzahl Patronen mit schwarzer Tinte um mehr als 10 % vom Erwartungswert abweicht.

$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,65 = 65$

$P(B) = B_{100;0,65}(X < 0,9 \cdot \mu) + B_{100;0,65}(X > 1,1 \cdot \mu)$

$P(B) = B_{100;0,65}(X \leq 58) + B_{100;0,65}(X \geq 72)$

$B_{100;0,65}(X \leq 58) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0,08768$

$B_{100;0,65}(X \geq 72) = 1 - B_{100;0,65}(X \leq 71) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0,0848$

$P(B) = 0,08768 + 0,0848 = 0,1725$

b) *Zuordnung eines Graphen zur Dichtefunktion:*

Wegen $\mu = 8$ und $\sigma = 0,04$ sind die Wendestelle der Dichtefunktion bei $x_1 = \mu - \sigma = 8 - 0,04 = 7,96$ und $x_2 = \mu + \sigma = 8 + 0,04 = 8,04$. Daher zeigt die Abbildung (II) NICHT die Dichtefunktion.

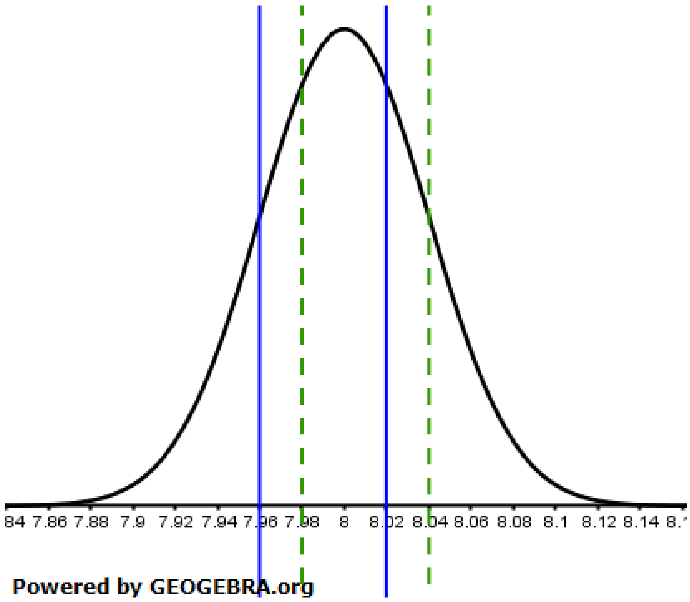
Wahrscheinlichkeit zufällig ausgewählte Patrone mit weniger als $7,95\,ml$ Tinte:

Y sei die Füllmenge der ausgewählten Patrone in ml.

Y ist normalverteilt mit $\mu = 8$ und $\sigma = 0,04$.

$P(Y < 7,95) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0,106$

Anderes Ereignis mit derselben Wahrscheinlichkeit wie Patroneninhalt zwischen $7{,}98\,ml$ und $8{,}04\,ml$:



Da das Schaubild der Dichtefunktion symmetrisch zur senkrechten Geraden $x = 8$ ist, ist der Flächeninhalt im Intervall $[7{,}98; 8{,}04]$ gleich groß wie der Flächeninhalt im Intervall $[7{,}96; 8{,}02]$.

Ereignis: Eine zufällig ausgewählte Patrone enthält zwischen $7{,}96\,ml$ und $8{,}02\,ml$ Tinte.

Kleinstes Intervall $[a; b]$, so dass Füllmenge einer zufällig ausgewählten Patrone mit einer Wahrscheinlichkeit von $92\,\%$ in $[a; b]$ liegt:

Da das Intervall $[a; b]$ möglichst klein sein soll, muss es symmetrisch um den Erwartungswert μ liegen, da die Fläche um den Erwartungswert zwischen der Dichtefunktion und der x-Achse am größten ist.

Bedingung: $P(8 - z \leq X \leq 8 + z) = 0{,}92$

Aus Symmetriegründen gilt:

$P(8 - z \leq X \leq \mu) = 0{,}46$ und daraus $P(X \leq 8 - z) = 0{,}04$

$8 - z \overset{\text{WTR}}{\approx} 7{,}93$ ←→ Hinweis WTR-Funktion *invnorm*

$z = 0{,}07$

Somit ist $a \approx 7{,}93$ und $b \approx 8{,}07$

c) *Nachweis, dass f eine Dichtefunktion über ihrem Definitionsbereich ist:*

1. Bedingung $f(x) \geq 0$ für $x \geq 0$
   Es gilt $f(x) = 0{,}25 \cdot e^{-0{,}25x} > 0$, da $e^{-0{,}25x} > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$
2. Bedingung $\lim\limits_{u \to \infty} \int_0^u f(x)\,dx = 1$
   $\int_0^u 0{,}25 \cdot e^{-0{,}25x}\,dx = [-e^{-0{,}25x}]_0^u = -e^{-0{,}25u} + 1$
   Wegen $\lim\limits_{u \to \infty} \int_0^u -e^{-0{,}25u} = 0$ ist $\lim\limits_{u \to \infty} \int_0^u f(x)\,dx = 1$

Lösungslogik C2

a) *Berechnung bestimmter Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung:*

A: „Genau zwei Personen erzielen jeweils die Punktzahl 4."
$B_{10;\frac{1}{4}}(X = 2)$

B: „Mindestens drei Personen erzielen jeweils eine Punktzahl, die kleiner als 5 ist."
$P(Zahl < 5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$
$B_{10;\frac{1}{12}}(X \geq 3)$

C: „Die Summe der erzielten Punktzahlen aller zehn Personen ist höchstens 31."
Damit müssen entweder alle 10 Personen Punktzahl 3 oder 9 Personen Punktzahl 3 und eine Person Punktzahl 4 gedreht haben, anders ist die Summe höchstens 31 nicht möglich.

b) *Beschreibung, bei welchem weiteren Spielverlauf Achim gewinnt.*
Es darf keine 5 oder 6 mehr gedreht werden.
Mindestanzahl Spieler, wenn Achim mit Wahrscheinlichkeit $2\ \%$ gewinnt.
X sei Anzahl der Personen, die eine 5 oder eine 6 drehen.
Binomialverteilung mit unbekanntem n und $p = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

c) *Hypothesentest.*
$H_0: p_0 = \frac{1}{3} \quad H_1: \ p_1 > \frac{1}{3}$.
$p_1 > p_0$ ➔ rechtsseitiger Test.
Beurteilung, ob Test der genannten Zielsetzung entspricht.
Siehe Klausuraufschrieb.
Formulierung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang.
Siehe Klausuraufschrieb.
Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Bedingung, dass $p_1 = 0{,}4$ ist.
Gesucht ist $B_{100;0,4}(X \leq 41)$ (Anzahl gedrehter 3en außerhalb des Ablehnungsbereichs).

Klausuraufschrieb C.2

a) *Berechnung bestimmter Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung:*
A: „Genau zwei Personen erzielen jeweils die Punktzahl 4.“
$$B_{10;\frac{1}{4}}(X = 2) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}2816$$
B: „Mindestens drei Personen erzielen jeweils eine Punktzahl, die kleiner als 5 ist.“
$$P(Zahl < 5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$
$$B_{10;\frac{1}{12}}(X \geq 3) = 1 - B_{10;\frac{7}{12}}(X \leq 2) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9837$$
C: „Die Summe der erzielten Punktzahlen aller zehn Personen ist höchstens 31.“
$$P(C) = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9} = 0{,}0000169 + 0{,}000127 = 0{,}00014$$

b) *Beschreibung, bei welchem weiteren Spielverlauf Achim gewinnt.*
Es darf keine 5 oder 6 mehr gedreht werden.

<u>Mindestanzahl Spieler, wenn Achim mit Wahrscheinlichkeit 2 % gewinnt.</u>
X sei Anzahl der Personen, die eine 5 oder eine 6 drehen.
Binomialverteilung mit unbekanntem n und $p = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

$B_{n;\frac{5}{12}}(X = 0) \leq 0{,}02$

$\left(\frac{5}{12}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^n \leq 0{,}02$

$\left(\frac{7}{12}\right)^n \leq 0{,}02 \qquad | \quad ln$

$n \cdot \ln\left(\frac{7}{12}\right) \leq \ln(0{,}02) \qquad | \quad : \ln\left(\frac{7}{12}\right)$

$n \geq \frac{\ln(0{,}02)}{\ln\left(\frac{7}{12}\right)} = 7{,}25$

$n = 8$ Spieler.
Mit Achim sind es somit insgesamt 9 Spieler.

c) *<u>Hypothesentest.</u>*
$H_0: p_0 \leq \frac{1}{3} \quad H_1: \ p_1 > \frac{1}{3}$.
$p_1 > p_0$ ➔ rechtsseitiger Test.
<u>Beurteilung, ob Test der genannten Zielsetzung entspricht.</u>
Der Test entspricht der genannten Zielsetzung.
Bei einem einseitigen Hypothesentest wird die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art begrenzt. Bei der Nullhypothese $H_0: p_0 \leq \frac{1}{3}$ tritt ein Fehler 1. Art ein, wenn irrtümlich von einer zu hohen Wahrscheinlichkeit für die Punktezahl 3 ausgegangen wird.
<u>Formulierung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang.</u>
Ein Fehler 2. Art tritt ein, wenn die Nullhypothese $H_0: p_0 \leq \frac{1}{3}$ nicht abgelehnt wird, obwohl die Wahrscheinlichkeit, die Punktzahl 3 zu erhalten, größer als $\frac{1}{3}$ ist.
<u>Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Bedingung, dass $p_1 = 0{,}4$ ist.</u>
$B_{100;0,4}(X \leq 41) = 0{,}6225$
(41 ist Anzahl gedrehter 3en außerhalb des Ablehnungsbereichs, Nullhypothese wird nicht abgelehnt.)