Lösungslogik C1

a) *Wahrscheinlichkeit für genau 66 verkaufte Patronen mit schwarzer Tinte:*
Gesucht ist binomialverteilte Wahrscheinlichkeit $B_{100;0,65}(X = 66)$.
Wahrscheinlichkeit dass Anzahl Patronen mit schwarzer Tinte um mehr als 10 % vom Erwartungswert abweicht.
Wir berechnen zunächst den Erwartungswert aus $\mu = n \cdot p$ und danach die binomialverteilte Wahrscheinlichkeit $B_{100;0,65}(X < 0,9\mu) + B_{100;0,65}(X > 1,1\mu)$.

b) *Zuordnung eines Graphen zur Dichtefunktion:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Wahrscheinlichkeit zufällig ausgewählte Patrone mit weniger als $7,95\ ml$ Tinte:
Berechnung mittels WTR über *normalcdf* mit lower-bound $-\infty$ und upper-bound $7,95$.
Anderes Ereignis mit derselben Wahrscheinlichkeit wie Patroneninhalt zwischen $7,98\ ml$ und $8,04\ ml$:
Siehe Klausuraufschrieb.
Kleinstes Intervall $[a; b]$, so dass Füllmenge einer zufällig ausgewählten Patrone mit einer Wahrscheinlichkeit von $92\ \%$ in $[a; b]$ liegt:
Gesucht ist z für normalverteilte Wahrscheinlichkeit $P(8 - z \leq X \leq 8 + z) = 0,92$.

c) *Nachweis, dass f eine Dichtefunktion über ihrem Definitionsbereich ist:*
Es ist zu prüfen dass:
1. $f(x) \geq 0$ für $x \geq 0$ und
2. $\lim\limits_{u \to \infty} \int_0^u f(x)\,dx = 1$ ist.

Klausuraufschrieb C1

a) *Wahrscheinlichkeit für genau 66 verkaufte Patronen mit schwarzer Tinte:*

$P(A) = B_{100;0,65}(X = 66) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}08214$

Wahrscheinlichkeit dass Anzahl Patronen mit schwarzer Tinte um mehr als 10 % vom Erwartungswert abweicht.

$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}65 = 65$

$P(B) = B_{100;0,65}(X < 0{,}9 \cdot \mu) + B_{100;0,65}(X > 1{,}1 \cdot \mu)$

$P(B) = B_{100;0,65}(X \leq 58) + B_{100;0,65}(X \geq 72)$

$B_{100;0,65}(X \leq 58) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}08768$

$B_{100;0,65}(X \geq 72) = 1 - B_{100;0,65}(X \leq 71) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}0848$

$P(B) = 0{,}08768 + 0{,}0848 = 0{,}1725$

b) *Zuordnung eines Graphen zur Dichtefunktion:*

Wegen $\mu = 8$ und $\sigma = 0{,}04$ sind die Wendestelle der Dichtefunktion bei $x_1 = \mu - \sigma = 8 - 0{,}04 = 7{,}96$ und $x_2 = \mu + \sigma = 8 + 0{,}04 = 8{,}04$. Daher zeigt die Abbildung (II) NICHT die Dichtefunktion.

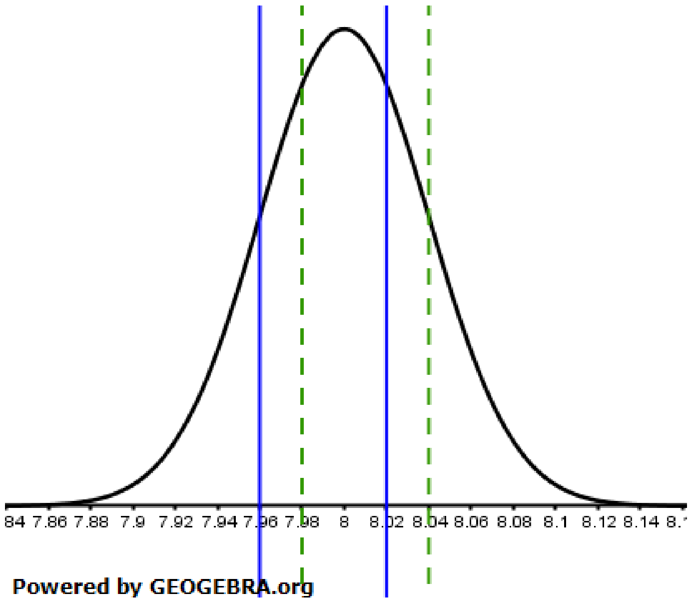
Wahrscheinlichkeit zufällig ausgewählte Patrone mit weniger als $7{,}95\,ml$ Tinte:

Y sei die Füllmenge der ausgewählten Patrone in ml.
Y ist normalverteilt mit $\mu = 8$ und $\sigma = 0{,}04$.

$P(Y < 7{,}95) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}106$

Abitur Leistungskurs Wahlteil Stochastik 2022 BW

Anderes Ereignis mit derselben Wahrscheinlichkeit wie Patroneninhalt zwischen $7{,}98\,ml$ und $8{,}04\,ml$:



Da das Schaubild der Dichtefunktion symmetrisch zur senkrechten Geraden $x = 8$ ist, ist der Flächeninhalt im Intervall $[7{,}98; 8{,}04]$ gleich groß wie der Flächeninhalt im Intervall $[7{,}96; 8{,}02]$.

Ereignis: Eine zufällig ausgewählte Patrone enthält zwischen $7{,}96\,ml$ und $8{,}02\,ml$ Tinte.

Kleinstes Intervall $[a; b]$, so dass Füllmenge einer zufällig ausgewählten Patrone mit einer Wahrscheinlichkeit von $92\,\%$ in $[a; b]$ liegt:

Da das Intervall $[a; b]$ möglichst klein sein soll, muss es symmetrisch um den Erwartungswert μ liegen, da die Fläche um den Erwartungswert zwischen der Dichtefunktion und der x-Achse am größten ist.

Bedingung: $P(8 - z \le X \le 8 + z) = 0{,}92$

Aus Symmetriegründen gilt:

$P(8 - z \le X \le \mu) = 0{,}46$ und daraus $P(X \le 8 - z) = 0{,}04$

$8 - z \overset{\text{WTR}}{\approx} 7{,}93$ ⟷ Hinweis WTR-Funktion *invnorm*

$z = 0{,}07$

Somit ist $a \approx 7{,}93$ und $b \approx 8{,}07$

c) *Nachweis, dass f eine Dichtefunktion über ihrem Definitionsbereich ist:*

1. Bedingung $f(x) \geq 0$ für $x \geq 0$
   Es gilt $f(x) = 0{,}25 \cdot e^{-0{,}25x} > 0$, da $e^{-0{,}25x} > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$
2. Bedingung $\lim\limits_{u\to\infty} \int_0^u f(x)\,dx = 1$
   $\int_0^u 0{,}25 \cdot e^{-0{,}25x}\,dx = [-e^{-0{,}25x}]_0^u = -e^{-0{,}25u} + 1$
   Wegen $\lim\limits_{u\to\infty} \int_0^u -e^{-0{,}25u} = 0$ ist $\lim\limits_{u\to\infty} \int_0^u f(x)\,dx = 1$

Lösungslogik C2

a) *Berechnung bestimmter Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung:*

A: „Genau zwei Personen erzielen jeweils die Punktzahl 4.“
$B_{10;\frac{1}{4}}(X = 2)$

B: „Mindestens drei Personen erzielen jeweils eine Punktzahl, die kleiner als 5 ist.“
$P(Zahl < 5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$
$B_{10;\frac{1}{12}}(X \geq 3)$

C: „Die Summe der erzielten Punktzahlen aller zehn Personen ist höchstens 31.“
Damit müssen entweder alle 10 Personen Punktzahl 3 oder 9 Personen Punktzahl 3 und eine Person Punktzahl 4 gedreht haben, anders ist die Summe höchstens 31 nicht möglich.

b) *Beschreibung, bei welchem weiteren Spielverlauf Achim gewinnt.*
Es darf keine 5 oder 6 mehr gedreht werden.
Mindestanzahl Spieler, wenn Achim mit Wahrscheinlichkeit $2\ \%$ gewinnt.
X sei Anzahl der Personen, die eine 5 oder eine 6 drehen.
Binomialverteilung mit unbekanntem n und $p = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

c) *Hypothesentest.*
$H_0: p_0 = \frac{1}{3}$ $\quad H_1:\ p_1 > \frac{1}{3}$.
$p_1 > p_0$ ➔ rechtsseitiger Test.
Beurteilung, ob Test der genannten Zielsetzung entspricht.
Siehe Klausuraufschrieb.
Formulierung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang.
Siehe Klausuraufschrieb.
Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Bedingung, dass $p_1 = 0{,}4$ ist.
Gesucht ist $B_{100;0,4}(X \leq 41)$ (Anzahl gedrehter 3en außerhalb des Ablehnungsbereichs).

Klausuraufschrieb C.2

a) *Berechnung bestimmter Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung:*
A: „Genau zwei Personen erzielen jeweils die Punktzahl 4.“
$B_{10;\frac{1}{4}}(X = 2) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}2816$
B: „Mindestens drei Personen erzielen jeweils eine Punktzahl, die kleiner als 5 ist.“
$P(Zahl < 5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$
$B_{10;\frac{1}{12}}(X \geq 3) = 1 - B_{10;\frac{7}{12}}(X \leq 2) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0{,}9837$
C: „Die Summe der erzielten Punktzahlen aller zehn Personen ist höchstens 31.“
$P(C) = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9} = 0{,}0000169 + 0{,}000127 = 0{,}00014$

b) *Beschreibung, bei welchem weiteren Spielverlauf Achim gewinnt.*
Es darf keine 5 oder 6 mehr gedreht werden.

Mindestanzahl Spieler, wenn Achim mit Wahrscheinlichkeit $2\ \%$ gewinnt.

X sei Anzahl der Personen, die eine 5 oder eine 6 drehen.
Binomialverteilung mit unbekanntem n und $p = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

$B_{n;\frac{5}{12}}(X = 0) \leq 0{,}02$

$\left(\frac{5}{12}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^n \leq 0{,}02$

$\left(\frac{7}{12}\right)^n \leq 0{,}02 \qquad | \quad ln$

$n \cdot \ln\left(\frac{7}{12}\right) \leq \ln\,(0{,}02) \qquad | \quad : \ln\left(\frac{7}{12}\right)$

$n \geq \frac{\ln(0{,}02)}{\ln\left(\frac{7}{12}\right)} = 7{,}25$

$n = 8$ Spieler.
Mit Achim sind es somit insgesamt 9 Spieler.

c) *Hypothesentest.*

$H_0: p_0 \leq \frac{1}{3} \quad H_1:\ p_1 > \frac{1}{3}$.

$p_1 > p_0$ ➔ rechtsseitiger Test.

Beurteilung, ob Test der genannten Zielsetzung entspricht.

Der Test entspricht der genannten Zielsetzung.
Bei einem einseitigen Hypothesentest wird die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art begrenzt. Bei der Nullhypothese $H_0: p_0 \leq \frac{1}{3}$ tritt ein Fehler 1. Art ein, wenn irrtümlich von einer zu hohen Wahrscheinlichkeit für die Punktezahl 3 ausgegangen wird.

Formulierung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang.

Ein Fehler 2. Art tritt ein, wenn die Nullhypothese $H_0: p_0 \leq \frac{1}{3}$ nicht abgelehnt wird, obwohl die Wahrscheinlichkeit, die Punktzahl 3 zu erhalten, größer als $\frac{1}{3}$ ist.

Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Bedingung, dass $p_1 = 0{,}4$ ist.

$B_{100;0{,}4}(X \leq 41) = 0{,}6225$

(41 ist Anzahl gedrehter 3en außerhalb des Ablehnungsbereichs, Nullhypothese wird nicht abgelehnt.)