Abituraufgaben grafisches Differenzieren und Integrieren (Pflichtteil) ab 2004

Lösungshinweise für alle Aufgaben

Aufgaben zum grafischen Differenzieren bzw. Integrieren lösen wir mithilfe der sogenannten

	***NEW*-Regel**						
Differenzieren ↓	$F(x)$	N_{VZW}	E	W			↑ Integrieren
	$f(x)$		N_{VZW}	E	W		
	$f'(x)$			N_{VZW}	E	W	

N_{VZW} = Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, E = Extremstelle, W = Wendestelle
$F(x)$=Stammfunktion, $f(x)$=1. Ableitung von F, $f'(x)$=2. Ableitung von F

Weiterhin gilt:

- Verläuft f oberhalb der x–Achse, so ist F streng monoton steigend.
- Verläuft f unterhalb der x–Achse, so ist F streng monoton fallend.
- Ist f' negativ, so ist F rechtsgekrümmt.
- Ist f' positiv, so ist F linksgekrümmt.

Lösung A5/04

(1) f ist streng monoton wachsend für $-3 < x < 3$.
Die Aussage ist wahr. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' verläuft im angegebenen Intervall oberhalb der x–Achse, somit ist f im Intervall streng monoton wachsend.

(2) Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendepunkt.
Die Aussage ist wahr. Der Wendepunkt einer Funktion führt zu einer Extremstelle ihrer Ableitungsfunktion. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' hat bei $x_0 = 0$ eine Extremstelle, somit hat f an der gleichen Stelle einen Wendepunkt.

(3) Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y–Achse.
Die Aussage ist falsch. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' ist achsensymmetrisch. Es verläuft in ganz $\mathbb{R}$ oberhalb der x-Achse. Damit ist f in ganz $\mathbb{R}$ monoton steigend, kann also nicht achsensymmetrisch sein.
Merke:
> Achsensymmetrische Ableitungen führen zur punktsymmetrischen Stammfunktion, die durch den Ursprung verläuft.
> Punktsymmetrische Ableitungen führen zu achsensymmetrischen Stammfunktionen.

(4) Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [-3;3]$.
Die Aussage ist unentscheidbar, da jede Funktion H mit $H(x) = F(x) + C$ eine Stammfunktion von f ist.

Lösung A5/05

a) Wegen x^2 hat das Schaubild der gegebenen Funktion bei $x_0 = 0$ eine doppelte Nullstelle. Keine der Abbildungen 2 bis 4 verfügt dort über diese doppelte Nullstelle.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben grafisches Differenzieren und Integrieren (Pflichtteil) ab 2004

b) Bild 4 ist das Schaubild der Funktion f'. f hat bei $x = 0$ und $x = -3$ Extremstellen. Extremstellen führen in der Ableitung zu Nullstellen. Dies ist nur bei Bild 4 der Fall.
Bild 2 ist das Schaubild der Funktion F. Wendepunkte einer Funktion führen zu Extremstellen in der Ableitung. F hat bei $x = 0$ und $x = -3$ Extremstellen, Bild 1 mit dem Schaubild der Ableitung von F hat dort Extremstellen.
Bild 3 ist das Schaubild der Funktion g mit einer Polstelle bei $x_0 = 0$.

Lösung A5/06

(1) *Das Schaubild von f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.*
Die Aussage ist falsch. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle $x = -2$ einen Extrempunkt. Nur Wendestellen einer Stammfunktion führen zu Extremstellen bei der Ableitungsfunktion. Wegen des Berührpunkts von f' mit der x–Achse liegt in f sogar ein Sattelpunkt vor.

(2) *Das Schaubild von f hat für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Wendepunkte.*
Die Aussage ist wahr. f' hat im angegebenen Intervall genau zwei Extremstellen, die bei f zu Wendepunkten führen.

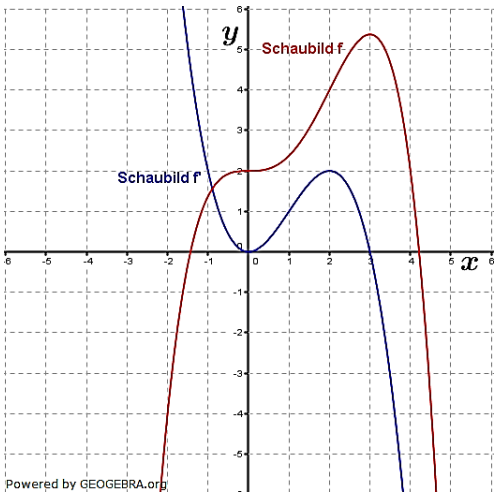
(3) *Das Schaubild von f verläuft im Schnittpunkt mit der y–Achse steiler als die erste Winkelhalbierende.*
Die Aussage ist wahr. Aus dem Schaubild von f' liest man für $x_0 = 0$ die Steigung $m = 4$ von f ab. Die 1. Winkelhalbierende hat die Steigung $m = 1$.

(4) $f(0) > f(5)$.
Die Aussage ist falsch. Die Ableitungskurve f' verläuft im angegebenen Intervall oberhalb der x–Achse, f ist in diesem Intervall somit streng monoton steigend. $f(0)$ muss somit kleiner als $f(5)$ sein.

Lösung A5/07

a) f ist für $x \leq 3$ monoton steigend und für $x > 3$ streng monoton fallend. f' verläuft für $x \leq 3$ oberhalb und für $x > 3$ unterhalb der x–Achse.
f hat bei $x = 3$ eine Extremstelle. f' hat bei $x = 3$ eine Nullstelle mit Vorzeichen-wechsel von + nach −. Die Extremstelle ist also ein Hochpunkt.
f hat zwei Wendepunkte bei $x = 0$ und $x = 2$. Wendepunkte von f führen zu Extremstellen von f'. Wegen der doppelten Nullstelle von f' bei $x = 0$ ist der Wendepunkt von f bei $x = 0$ ein Sattelpunkt.

b) $f(x) = \int f'(x)dx + 2$
Der Graph von f kommt aus dem III. Quadranten, hat in $S_y(0|2)$ einen Sattelpunkt, verläuft weiter im I. Quadranten über einen Wendepunkt bei $x = 2$, einen Hochpunkt bei $x = 3$ und verläuft dann in den IV. Quadranten.



Abituraufgaben grafisches Differenzieren und Integrieren (Pflichtteil) ab 2004

Lösung A5/08

$f(x)=\frac{-2x}{x+a}$, $g(x)=-2+b\cdot e^{-0{,}5x}$, $h(x)=c\cdot x^2-x$

a) $f(x)$ ist eine gebrochen rationale Funktion. Höchste Potenz von x im Zähler ist gleich der höchsten Potenz von x im Nenner. Der Graph der Funktion hat eine waagrechte Asymptote bei $y=\frac{-2x}{x}=-2$. Die Funktion hat eine Definitions-lücke für $x=-a;\ a>0$ bzw. $x=|a|;\ a<0$. Nur Schaubild 2 hat sowohl eine waagrechte als auch senkrechte Asymptote. Schaubild 2 ist der Graph der Funktion f.
$g(x)$ ist eine Exponentialfunktion mit einer Schranke bei $y=-2$ und einer Nullstelle $N_1(-2+b\cdot 1=0|0)$. Schaubild 3 ist der Graph der Funktion g.
$h(x)$ ist eine Parabel mit den Nullstellen $N_1(0|0)$ und $N_2\left(\frac{1}{c}\middle|0\right)$. Schaubild 4 ist der Graph der Funktion h.

b) Aus den Erläuterungen zu a) leiten wir ab:
$a=1$ $\quad b=2$ $\quad c=\frac{1}{6}$

Lösung A5/09

a) Extremstellen einer Stammfunktion führen zu Nullstellen mit Vorzeichenwechsel bei der Ableitung. Der Graph von F hat zwei Extremstellen bei $x=-1$ und $x=2$. Wegen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ bei $x=-1$ ist dort ein Hochpunkt. Wegen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ bei $x=2$ ist dort ein Tiefpunkt.
Wendestellen einer Stammfunktion führen zu Extremstellen bei der Ableitung. Der Graph von F hat eine Wendestelle bei $x=0$. Im Wendepunkt herrscht negative Steigung.
Über Nullstellen kann keine Aussage getroffen werden, da mit F auch jede Funktion G mit $G(x)=F(x)+C$ eine Stammfunktion sein kann.

b) $F(6)-F(2)=\int_2^6 f(x)dx$ ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x–Achse im Bereich $2\le x\le 6$. Dieser ist aus der Zeichnung ersichtlich größer als 1. Somit gilt $F(6)-F(2)>1$.

Lösung A5/10

a) Die Funktion x ist wegen des Nenners $1+x^2$ achsensymmetrisch. Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a}{1+x^2}=0$ hat sie die waagrechte Asymptote $y=-1$. Dies ist nur in Abbildung 2 der Fall.
Der Graph der Funktion schneidet die y–Achse in $S_y(0|2)$, also $f(0)=2$.
$2=\frac{a}{1+0}-1 \quad\Rightarrow\quad a=3$

b) Extrempunkte von f führen zu Nullstellen von f'. f besitzt eine einzige Extremstelle bei $x=0$ als Hochpunkt. Die Nullstelle von f' muss also einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ aufweisen. Dies ist nur in Abbildung 3 der Fall.
Abbildung 3 ist das Schaubild der Ableitungsfunktion f'.
Extremstellen der Stammfunktion führen zu Nullstellen der Ableitungsfunktion. Wendepunkte der Stammfunktion führen zu Extremstellen der Ableitungsfunktion. Dies ist sowohl in Abbildung 1 als auch in Abbildung 4 der Fall.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben grafisches Differenzieren und Integrieren (Pflichtteil) ab 2004

Wegen $I(x) = \int_2^x f(t)dt$ muss gelten $I(2) = \int_2^2 f(t)dt$. Da jedoch $\int_2^2 f(t)dt = 0$, muss $I(2) = 0$ sein. Dies ist nur in Abbildung 4 der Fall.
Abbildung 4 ist das Schaubild der Integralfunktion I.

Lösung A5/11

(1) Die Funktionswerte des Schaubildes von f sind für $-3 \leq x \leq 1$ positiv, also ist F in diesem Bereich monoton wachsend.

(2) f hat für $-3{,}5 \leq x \leq 3{,}5$ zwei Extremstellen und einen Sattelpunkt. Also hat f' in diesem Bereich drei Nullstellen, wobei die Nullstelle bei $x_0 = 0$ (Sattelpunkt) sogar eine doppelte Nullstelle ist.

(3) $\int_0^3 f'(x)dx = f(3) - f(0)$. Aus dem Schaubild liest man ab:
$f(3) = 0$ und $f(0) = 1$, also $f(3) - f(0) = -1 = \int_0^3 f'(x)dx$

(4) $O(0|0)$ ist Sattelpunkt von f. Dieser führt zu einem Extremwert, der die x–Achse berührt, und gleichzeitig zu einer Nullstelle bei f' wird. Die Steigung links und rechts des Sattelpunktes ist negativ, also berührt die Extremstelle von f' die x–Achse von unten, es liegt kein Vorzeichenwechsel vor, der Extrempunkt muss ein Hochpunkt sein.

Lösung A5/12

a) In Abbildung 2 ist $f(0) = -2$. Keine der anderen Schaubilder hat den Schnittpunkt $S_y(0|-2)$.

b) $g(x) = f(x-a)$ stellt eine Verschiebung von $f(x)$ um a Stellen nach rechts dar. Abbildung 4 ist die Verschiebung von $f(x)$ um 2 Stellen nach rechts mit $a = 2$.
$h(x) = b \cdot f(x)$ stellt eine Streckung von $f(x)$ in y–Richtung dar. Da Abbildung 1 lediglich eine Verschiebung von $f(x)$ um 3 Stellen nach oben ist, ist Abbildung 3 das Schaubild der Funktion h. Wegen des Verlaufs des Schaubildes von h aus dem II. Quadranten in den IV. Quadranten ist $b < 0$. Weiterhin gilt: $h(0) = b \cdot f(0) = 1$.
$b \cdot (-2) = 1 \implies b = -\frac{1}{2}$

c) $k(x) = f(x) + 3$

Lösung A5/13

(1) $f(2) = 1$
Die Funktion hat an der Stelle $x = 2$ den Funktionswert 1.

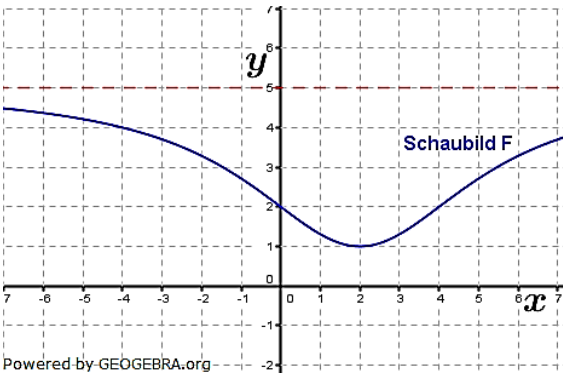
(2) $f'(2) = 0$
Die Funktion hat an der Stelle $x = 2$ eine waagrechte Tangente.

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$
Die Funktion hat an der Stelle $x = 4$ einen Wendepunkt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben grafisches Differenzieren und Integrieren (Pflichtteil) ab 2004

(4) Für $x \longrightarrow +\infty$ und $x \longrightarrow -\infty$ gilt: $f(x) \longrightarrow 5$
Die Funktion hat für $x \longrightarrow |\infty|$ die waagrechte Asymptote $y = 5$.
Hinweis zu (2):
Sie können nur die Angabe einer waagrechten Tangente machen, keinesfalls die Aussage über einen Extrempunkt treffen, da in der Aufgabenstellung keine Aussage über die hinreichende Bedingung $f''(2) \neq 0$ gemacht ist.
Möglicher Verlauf des Graphen:
Hinweis:
Dies ist nur ein möglicher Verlauf. Es gibt hiervon noch viele andere.



Lösung A5/14

K_f ist eine Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(2|-4)$.
K_g ist eine Gerade mit der Steigung $m = -1$ und dem y–Achsenabschnitt $c = 2$.
Hieraus ergeben sich die Funktionsgleichungen zu:
$f(x) = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x$ und $g(x) = -x + 2$

a) $g(3) = -1;\ \ f(-1) = 5;\ \ f(g(3)) = 5$
$f\big(g(x)\big) = (-x+2)^2 - 4(-x+2) = x^2 - 4$
$f\big(g(x)\big) = 0 \Longrightarrow\ \ x^2 - 4 = 0$
$x_1 = 2;\ \ x_2 = -2$

b) $h(x) = (x^2 - 4x) \cdot (2 - x) = 2x^2 - x^3 - 8x + 4x^2 = -x^3 + 6x^2 - 8x$
$h'(x) = -3x^2 + 12x - 8$
$h'(2) = 4$

Lösung A5/15

(1) *Der Graph von f hat bei $x = -3$ einen Tiefpunkt.*
Die Aussage ist wahr. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle $x = -3$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$.

(2) $f(-2) < f(-1)$
Die Aussage ist wahr. f' verläuft für $-3 < x < 0$ oberhalb der x -Achse. f ist somit in diesem Bereich monoton steigend, also ist $f(-2) < f(-1)$.

(3) $f''(-2) + f'(-2) < 1$.
Die Aussage ist falsch. Die Funktion f' hat für $x = -2$ einen Hochpunkt. Somit ist $f''(-2) = 0$. $f'(-2) = 2$ (aus Grafik abgelesen). Somit ist $f''(-2) + f'^{(-2)} = 2 > 1$.

(4) *Der Grad der Funktion f ist mindestens 4.*
Die Aussage ist wahr. Der Grad der Funktion f' ist mindestens 3. Durch die Integration von f' entsteht die Funktion f von damit mindestens dem Grad 4.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben grafisches Differenzieren und Integrieren (Pflichtteil) ab 2004

Lösung A5/16

(1) $f(1) = F(1)$.
Die Aussage ist wahr. $F(1) = 0$ wegen Berührpunkt mit x-Achse, der ein Tiefpunkt ist. Somit ist $f'(1) = 0$.

(2) $\int_0^2 f(x)dx = 4$
Die Aussage falsch. Das Integral besagt, dass $F(2) - F(0)$ gleich *4* sein soll. Mit $F(2) = 4$=*4* und $F(0) = 2$ ergibt sich $F(2) - F(0) = 2$.

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.
Die Aussage ist wahr. F hat bei $x = 0$ einen Wendepunkt. Somit ist $f''(0) = 0$.

(4) $f\big(F(-2)\big) > 0$.
Die Aussage ist falsch. $F(-2) = 0;\ f\big(F(-2)\big) = f(0)$. Der Graph von F hat in $x_0 = 0$ negative Steigung, somit ist $f(0) < 0$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de