Abituraufgaben allg. bildendes Gymnasium Pflichtteil 2004 BW

Aufgabe 1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$ und vereinfachen Sie $f'(x)$.

Aufgabe 2

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x^2}+sin(2x)$ an.

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $e^{4x}-11e^{2x}+18=0$.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{2}{x}+2;\ x\neq 0$. Das Schaubild von f hat im Punkt $P(1|v)$ die Tangente t. Ermitteln Sie eine Gleichung von t. Die Tangente t schneidet die x–Achse im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5

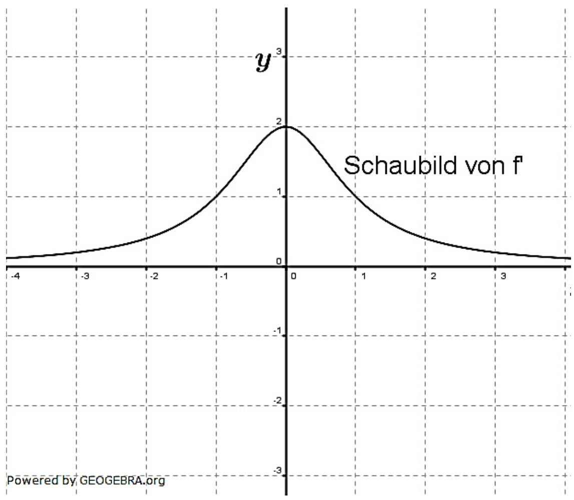
Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Welche der folgenden Aussagen über die Funktion f sind wahr, falsch oder unentscheidbar?

(1) f ist streng monoton wachsend für $-3<x<3$.

(2) Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendepunkt.

(3) Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y–Achse.

(4) Es gilt $f(x)>0$ für alle $x\in[-3;3]$.



Aufgabe 6

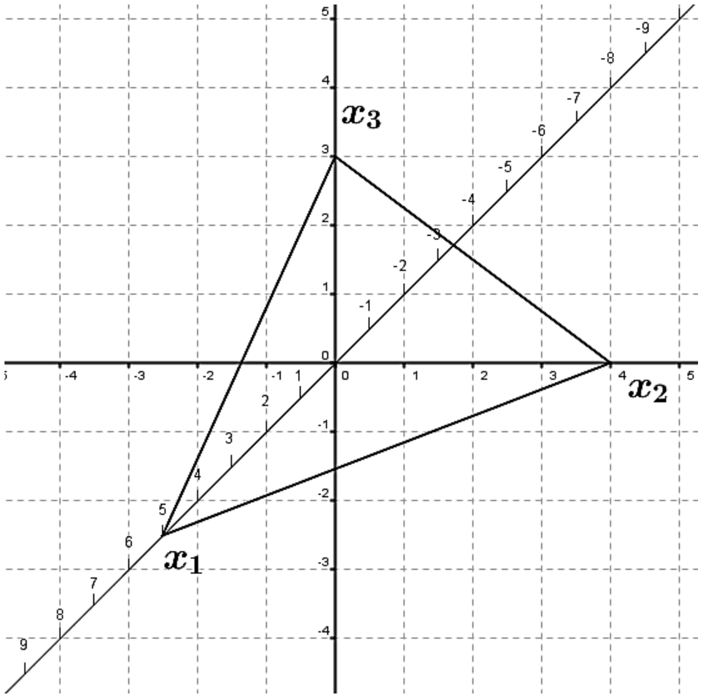
Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E durch

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$$

$$E:\ 4x_1-2x_2+4x_3=11.$$

Prüfen Sie nach, ob der Punkt $A(3|0|2)$ auf der Geraden g liegt.
Zeigen Sie: Die Gerade g ist orthogonal zur Ebene E.
Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes der Ebene E, welcher vom Punkt A den kleinsten Abstand hat.

Aufgabe 7
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der dargestellten Ebene.



Aufgabe 8
Gegeben sind im Raum eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf g liegt.
Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung des Abstandes von A zu g.

Lösung Aufgabe 1

$f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$ Quotientenregel erforderlich

$f'\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v-v'u}{v^2}$

$u = x^2 \quad u' = 2x$

$v = x^2 + 3 \quad v' = 2x$

$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2+3)-2x\cdot x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^3+6x-2x^3}{(x^2+3)^2}$

$f'(x) = \frac{6x}{(x^2+3)^2}$

Lösung Aufgabe 2

$f(x) = \frac{1}{x^2} + sin(2x)$ Summenregel mit Potenzregel erforderlich

---

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} + sin(2x)\right) dx$$

$$F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{cos(2x)}{2} + C$$

Lösung Aufgabe 3

$e^{4x} - 11e^{2x} + 18 = 0$ Substitution und quadratische Gleichung

---

Substitution:

$e^{2x} = z$

$z^2 - 11z + 18 = 0$ | quadratische Gleichung

$z_{1,2} = 5{,}5 \pm \sqrt{30{,}25 - 18}$ | p/q-Formel

$z_{1,2} = 5{,}5 \pm \sqrt{12{,}25} = 5{,}5 \pm 3{,}5$

$z_1 = 9; \ z_2 = 2$

Resubstitution:

Satz vom Null$e^{2x_1} = 9 \quad \Longrightarrow \quad 2x_1 ln(e) = ln(9) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{ln(9)}{2}$

$e^{2x_2} = 2 \quad \Longrightarrow \quad 2x_2 ln(e) = ln(2) \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{ln(2)}{2}$

$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\ln(2) ; \frac{1}{2}\ln(9)\right\}$

Lösung Aufgabe 4

Lösungslogik:

Berechnung der y–Koordinate v des Punktes P über $f(1)$.
Berechnung der Steigung im Punkt P über $f'(1)$.
Aufstellung der Tangentengleichung $t(x)$ über die Punkt-Steigungsformel.
Berechnung der Nullstelle von $t(x)$.

Klausuraufschrieb:

$v = f(1) = \frac{2}{1} + 2 = 4 \Rightarrow \quad P(1|4)$

$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow \ f'(1) = -\frac{2}{1} = -2$

$t(x) = f'(x_P) \cdot (x - x_P) + y_P$ | Punkt-Steigungs-Formel für $P(x_P|y_P)$

$t(x) = -2(x-1) + 4 = -2x + 6$

$t(x) = 0 = -2x + 6 \ \Rightarrow \ x = 3$

Tangentenschnittpunkt mit der x–Achse ist $N(3|0)$.

Lösung Aufgabe 5

(1) f ist streng monoton wachsend für $-3 < x < 3$.
Die Aussage ist wahr. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' verläuft im angegebenen Intervall oberhalb der x–Achse, somit ist f im Intervall streng monoton wachsend.

(2) Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendepunkt.
Die Aussage ist wahr. Der Wendepunkt einer Funktion führt zu einer Extremstelle ihrer Ableitungsfunktion. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' hat bei $x_0 = 0$ eine Extremstelle, somit hat f an der gleichen Stelle einen Wendepunkt.

(3) Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y–Achse.
Die Aussage ist falsch. Das achsensymmetrische Schaubild der Ableitungsfunktion f' hat nur geradzahlige Exponenten von x. Diese werden durch das Integral zu ungeradzahligen Exponenten der Stammfunktion. Funktionen mit nur ungeradzahligen Exponenten von x sind punktsymmetrisch.

(4) Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [-3; 3]$.
Die Aussage ist unentscheidbar, da jede Funktion H mit $H(x) = F(x) + C$ eine Stammfunktion von f ist.

Lösung Aufgabe 6

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}; \ t \in \mathbb{R} \qquad E\colon 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11.$

Lösungslogik

Punktprobe mit $A(3|0|2)$ auf g.
Normalenvektor von E muss ein Vielfaches des Richtungsvektors von g Sein.
Wegen der Orthogonalität von E und g ist dies der Schnittpunkt $S(x_{1_S}|x_{2_S}|x_{3_S})$ der Geraden und der Ebene. Wir bilden $g \cap E$.

Klausuraufschrieb

Punkt $A(3|0|2)$ auf g:

$\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$3 = 1 + 2t \quad \Rightarrow \ t = 1$

$0 = 1 - t \quad \Rightarrow t = 1$

$2 = 0 - 2t \quad \Rightarrow \ t = 1$

Der Punkt liegt auf der Geraden g.

g orthogonal zu E:

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies 2 \cdot \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{n_E}$$

Die Gerade g ist orthogonal zur Ebene E.
Punkt der Ebene, welcher vom Punkt A den kleinsten Abstand hat:
$g \cap E$
$x_1 = 1 + 2t;\ \ x_2 = 1 - t;\ \ x_3 = 2t$
$4 \cdot (1 + 2t) - 2 \cdot (1 - t) + 4 \cdot 2t = 11$
$4 + 8t - 2 + 2t + 8t = 11 \implies \ \ 18t = 9$
$t = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} x_{1_S} \\ x_{2_S} \\ x_{3_S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $S\left(2 \left| \frac{1}{2} \right| 1\right)$ der Ebene E hat von $A(3|0|2)$ den kleinsten Abstand.

Lösung Aufgabe 7

Lösungslogik

Wir lesen die Spurpunkte der Ebene aus der Grafik ab und setzen diese Punkte in die Achsenabschnittsform der Ebene ein und multiplizieren diese dann mit dem Hauptnenner.

Klausuraufschrieb

$S_{x_1}(5|0|0);\ \ S_{x_2}(0|4|0);\ \ S_{x_3}(0|0|3)$
$\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{3} = 1$ | Achsenabschnittsform
$12x_1 + 15x_2 + 20x_3 = 60$

Lösung Aufgabe 8

Man berechnet den Abstand über die Formel

$$d = \frac{|\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{P_1A}|}{|\overrightarrow{a_1}|}$$

mit $\overrightarrow{a_1}$ als Richtungsvektor der Geraden g und $\overrightarrow{P_1A}$ als Vektor zwischen dem Aufpunkt P_1 der Geraden und dem Punkt A.