Aufgabe A1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$.

Aufgabe A2

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = 4cos\left(\frac{1}{4}x\right) - \frac{1}{4}x^4$.

Aufgabe A3

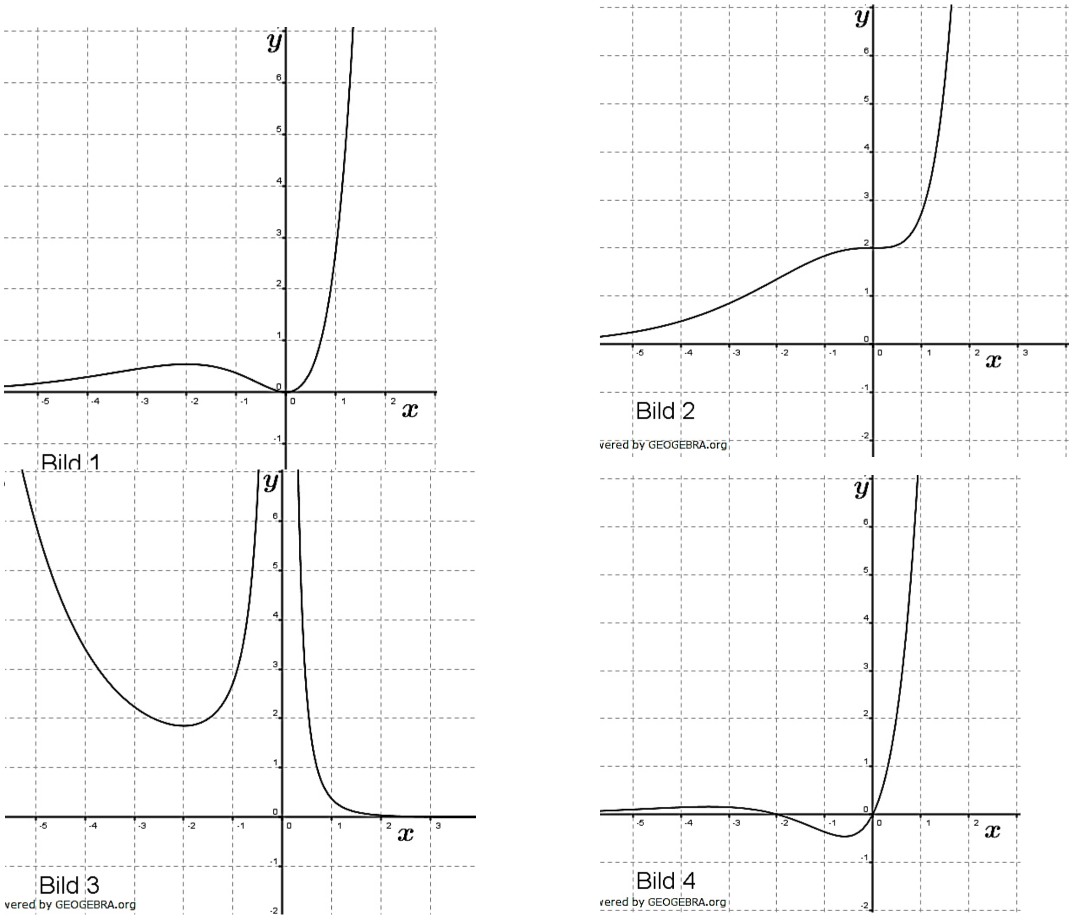
Lösen Sie die Gleichung $x^5 - 3x^3 - 4x = 0$.

Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$; $x \neq 0$. Geben Sie die Asymptoten des Schaubilds von f an. Skizzieren Sie damit das Schaubild von f. Ermitteln Sie eine Gleichung der Normalen im Punkt $P(2|f(2))$.

Aufgabe A5

Gegeben sind die Schaubilder der Funktion f mit $f(x) = x^2 e^x$, ihrer Ableitungsfunktion f', einer Stammfunktion F von f und der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.



a) Begründen Sie, dass Bild 1 das Schaubild der Funktion f sein kann.

b) Ordnen Sie die Funktionen f', F und g den übrigen Schaubildern zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe A6

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8.$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 3.$$

Wie lässt sich ein solches Gleichungssystem und seine eindeutige Lösung geometrisch deuten?

Aufgabe A7

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die den Punkt $A(2|-1|-2)$ und die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$ enthält.

Aufgabe A8

Gegeben sind eine Ebene E und ein Punkt P, der nicht in E liegt. P wird an E gespiegelt.

Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Bildpunkt P' zu bestimmen. Fertigen Sie eine Skizze an.

Lösung A1

$f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$ Produktregel erforderlich

$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$
$u = x^3 \qquad u' = 3x^2$
$v = e^{2x} \qquad v' = 2e^{2x}$
$f'^{(x)} = 3x^2e^{2x} + 2e^{2x}x^3$
$f'(x) = e^{2x}(3x^2 + 2x^3)$

Lösung A2

$f(x) = 4cos\left(\frac{1}{4}x\right) - \frac{1}{4}x^4$ Summen-, Potenzregel, lineare Substitution

---

$$F(x) = \frac{4sin(\frac{1}{4}x)}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4 \cdot 5}x^5 + c$$
$$F(x) = 16sin\left(\frac{1}{4}x\right) - \frac{1}{20}x^5 + c$$

Lösung A3

$x^5 - 3x^3 - 4x = 0$ Faktorisieren, Satz vom Nullprodukt, Substitution

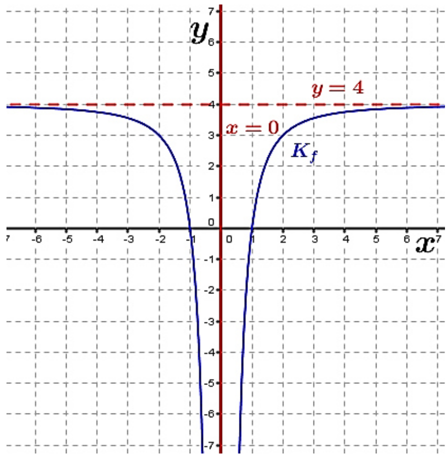
---

Faktorisieren (x ausklammern):
$x(x^4 - 3x^2 - 4) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1 = 0;\ x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
Substitution:
$x^2 = z$
$z^2 - 3z - 4 = 0$ | quadratische Gleichung
$z_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 4}$ | p/q-Formel
$z_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = 1{,}5 \pm 2{,}5$
$z_1 = -1;\ z_2 = 4$
Resubstitution:
$x_{2,3}^2 = -1 \implies \mathbb{L} = \{\}$
$x_{4,5}^2 = 4 \implies x_4 = -2;\ x_5 = 2$
$\mathbb{L} = \{-2; 0; 2\}$

Lösung A4

Lösungslogik

Asymptoten:
Wir untersuchen die Definitionslücken von f sowie globale Verhalten für $x \longrightarrow \pm\infty$.
Berechnung der y–Koordinate v des Punktes P über $f(2)$.
Berechnung der Steigung im Punkt P über $f'(2)$.
Bestimmung der Steigung der Normalen n über die Orthogonalitätsbedingung $m_1 \cdot m_2 = -1$.
Aufstellung der Normalengleichung $n(x)$ über die Punkt-Steigungsformel.



Klausuraufschrieb

$\mathbb{D} = x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \Longrightarrow$ Das Schaubild hat die senkrechte Asymptote (Pol) $x = 0$.
$\lim\limits_{x \to |\infty|} f(x) = 4 \Longrightarrow$ Das Schaubild hat die waagrechte Asymptote $y = 4$.

$f(2) = 4 - \frac{4}{2^2} = 3 \;\Longrightarrow\; P(2|3)$

$f'(x) = \frac{8}{x^3} \Longrightarrow \; f'(2) = \frac{8}{8} = 1$

$m_t \cdot m_n = -1 \Longrightarrow \; m_n = -1$ | Orthogonalitätsbedingung

$n(x) = -\frac{1}{f'(x_P)} \cdot (x - x_P) + y_P$ | Punkt-Steigungs-Formel für $P(x_P|y_P)$

$n(x) = -(x - 2) + 3 = -x + 5$

Lösung A5

a) Wegen x^2 hat das Schaubild der gegebenen Funktion bei $x_0 = 0$ eine doppelte Nullstelle. Keine der Abbildungen 2 bis 4 verfügt dort über diese doppelte Nullstelle.

b) Bild 4 ist das Schaubild der Funktion f'. f hat bei $x = 0$ und $x = -3$ Extremstellen. Extremstellen führen in der Ableitung zu Nullstellen. Dies ist nur bei Bild 4 der Fall.
Bild 2 ist das Schaubild der Funktion F. Wendepunkte einer Funktion führen zu Extremstellen in der Ableitung. F hat bei $x = 0$ und $x = -3$ Extremstellen, Bild 1 mit dem Schaubild der Ableitung von F hat dort Extremstellen.
Bild 3 ist das Schaubild der Funktion g mit einer Polstelle bei $x_0 = 0$.

Lösung A6

Lösungslogik

Wegen des Pflichtteils ist hier die Verwendung eines GTR ausgeschlossen, das Gleichungssystem muss manuell gelöst werden nach dem Gaußschen Eliminierungsverfahren.

Klausuraufschrieb

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	4	1	10	
II	1	2	1	8	II-I
III	1	1	-1	3	III-I

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	4	1	10	
II‘	0	-2	0	-2	
III‘	0	-3	-2	-7	$\mathrm{II}'\cdot(-3)+\mathrm{III}'\cdot 2$

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	1	4	1	10	
II‘	0	-2	0	-2	
III‘‘	0	0	-4	-8	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:

$-4x_3=-8 \quad\Longrightarrow\quad x_3=2$

$-2x_2=-2 \quad\Longrightarrow\quad x_2=1$

$x_1+4x_2+x_3=1$

$x_1+4\cdot 1-2=10 \quad\Longrightarrow\quad x_1=4$

$\mathbb{L}=\{x_1|x_2|x_3(8|1|2)\}$

Das Gleichungssystem beschreibt drei Ebenen im Raum, die sich in einem einzigen Punkt $P(4|1|2)$ schneiden.

Lösung A7

Lösungslogik

Die Ebene wird gebildet über den Aufpunkt und den Richtungsvektor von g sowie dem zweiten Richtungsvektor vom Aufpunkt von g zum Punkt A. Über das Kreuzprodukt aus den beiden Richtungsvektoren ermitteln wir den Normalenvektor der Ebene. Die Punktprobe mit z. B. dem Punkt A in der Koordinatengleichung ergibt den den Wert von d.

Klausuraufschrieb

$g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R} \qquad A(2|-1|-2)$

$\overrightarrow{rv_1}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{rv_2}=\begin{pmatrix}3-2\\3+1\\1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$

$k\cdot\overrightarrow{n_E}=\overrightarrow{rv_1}\times\overrightarrow{rv_2}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-8\\12\end{pmatrix}=-4\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$

$E\colon x_1+2x_2-3x_3=d \qquad |$ Punktprobe mit $A(2|-1|-2)$

$E\colon 2+2\cdot(-1)-3\cdot(-2)=d \Longrightarrow d=6$

$E\colon x_1+2x_2-3x_3=6$

Lösung A8

1) Man stellt die Gleichung einer Hilfsgeraden g auf, die orthogonal zu E ist und den Punkt P enthält. Der Normalenvektor von E ist dabei Richtungsvektor von g.
2) Man schneidet g mit E und bestimmt die Koordinaten des Schnittpunktes D.
3) Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP'}$ bestimmt sich dann aus $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PD}$