

### Lösung A1

$$f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$$

Produktregel erforderlich

$$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$$

$$u = x^3 \quad u' = 3x^2$$

$$v = e^{2x} \quad v' = 2e^{2x}$$

$$f'(x) = 3x^2 e^{2x} + 2e^{2x} x^3$$

$$f'(x) = e^{2x}(3x^2 + 2x^3)$$

### Lösung A2

$$f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{4}x\right) - \frac{1}{4}x^4 \quad \text{Summen-, Potenzregel, lineare Substitution}$$

$$F(x) = \frac{4\sin\left(\frac{1}{4}x\right)}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4 \cdot 5}x^5 + c$$

$$F(x) = 16\sin\left(\frac{1}{4}x\right) - \frac{1}{20}x^5 + c$$

### Lösung A3

$$x^5 - 3x^3 - 4x = 0$$

Faktorisieren, Satz vom Nullprodukt, Substitution

Faktorisieren ( $x$  ausklammern):

$$x(x^4 - 3x^2 - 4) = 0$$

| Satz vom Nullprodukt

$$x_1 = 0; \quad x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Substitution:

$$x^2 = z$$

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

| quadratische Gleichung

$$z_{1,2} = 1,5 \pm \sqrt{2,25 + 4}$$

|  $p/q$ -Formel

$$z_{1,2} = 1,5 \pm \sqrt{6,25} = 1,5 \pm 2,5$$

$$z_1 = -1; \quad z_2 = 4$$

Resubstitution:

$$x_{2,3}^2 = -1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$$

$$x_{4,5}^2 = 4 \Rightarrow x_4 = -2; \quad x_5 = 2$$

$$\mathbb{L} = \{-2; 0; 2\}$$

### Lösung A4

#### Lösungslogik

Asymptoten:

Wir untersuchen die Definitionslücken von  $f$  sowie globale Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$ .

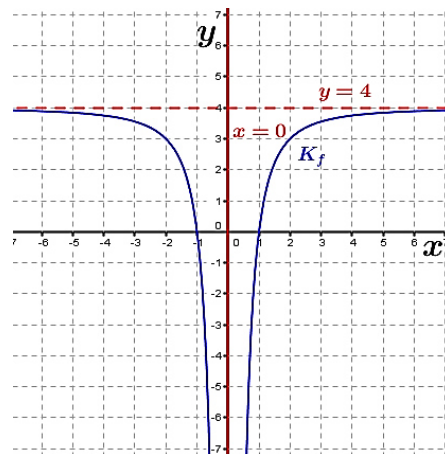
Berechnung der  $y$ -Koordinate  $v$  des Punktes  $P$  über  $f(2)$ .

Berechnung der Steigung im Punkt  $P$  über  $f'(2)$ .

Bestimmung der Steigung der Normalen  $n$  über die Orthogonalitätsbedingung  $m_1 \cdot$

$$m_2 = -1.$$

Aufstellung der Normalengleichung  $n(x)$  über die Punkt-Steigungsformel.



#### Klausuraufschrieb

$\mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$  Das Schaubild hat die senkrechte Asymptote (Pol)  $x = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow |\infty|} f(x) = 4 \Rightarrow$  Das Schaubild hat die waagrechte Asymptote  $y = 4$ .

$$f(2) = 4 - \frac{4}{2^2} = 3 \Rightarrow P(2|3)$$

$$f'(x) = \frac{8}{x^3} \Rightarrow f'(2) = \frac{8}{8} = 1$$

$$m_t \cdot m_n = -1 \Rightarrow m_n = -1$$

| Orthogonalitätsbedingung

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_P)} \cdot (x - x_P) + y_P$$

| Punkt-Steigungs-Formel für  $P(x_P|y_P)$

$$n(x) = -(x - 2) + 3 = -x + 5$$

### Lösung A5

a) Wegen  $x^2$  hat das Schaubild der gegebenen Funktion bei  $x_0 = 0$  eine doppelte Nullstelle. Keine der Abbildungen 2 bis 4 verfügt dort über diese doppelte Nullstelle.

b) Bild 4 ist das Schaubild der Funktion  $f'$ .  $f$  hat bei  $x = 0$  und  $x = -3$  Extremstellen. Extremstellen führen in der Ableitung zu Nullstellen. Dies ist nur bei Bild 4 der Fall.

Bild 2 ist das Schaubild der Funktion  $F$ . Wendepunkte einer Funktion führen zu Extremstellen in der Ableitung.  $F$  hat bei  $x = 0$  und  $x = -3$  Extremstellen, Bild 1 mit dem Schaubild der Ableitung von  $F$  hat dort Extremstellen.

Bild 3 ist das Schaubild der Funktion  $g$  mit einer Polstelle bei  $x_0 = 0$ .

### Lösung A6

#### Lösungslogik

Wegen des Pflichtteils ist hier die Verwendung eines GTR ausgeschlossen, das Gleichungssystem muss manuell gelöst werden nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

Klausuraufschrieb

Gauß-Schema					
Nr.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	=	Operation
I	1	4	1	10	
II	1	2	1	8	II-I
III	1	1	-1	3	III-I

Nr.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	=	Operation
I	1	4	1	10	
II'	0	-2	0	-2	
III'	0	-3	-2	-7	II' · (-3) + III' · 2

Nr.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	=	Operation
I	1	4	1	10	
II''	0	-2	0	-2	
III''	0	0	-4	-8	

Die untere Dreiecksmatrix ist erstellt, wir lesen die Ergebnisse ab:

$$\begin{aligned} -4x_3 &= -8 & \Rightarrow x_3 &= 2 \\ -2x_2 &= -2 & \Rightarrow x_2 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 4 \cdot 1 - 2 &= 10 & \Rightarrow x_1 &= 4 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \{x_1|x_2|x_3(8|1|2)\}$$

Das Gleichungssystem beschreibt drei Ebenen im Raum, die sich in einem einzigen Punkt  $P(4|1|2)$  schneiden.

## Lösung A7

### Lösungslogik

Die Ebene wird gebildet über den Aufpunkt und den Richtungsvektor von  $g$  sowie dem zweiten Richtungsvektor vom Aufpunkt von  $g$  zum Punkt  $A$ . Über das Kreuzprodukt aus den beiden Richtungsvektoren ermitteln wir den Normalenvektor der Ebene. Die Punktprobe mit z. B. dem Punkt  $A$  in der Koordinatengleichung ergibt den Wert von  $d$ .

### Klausuraufschrieb

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \quad A(2|-1|-2)$$

$$\overrightarrow{rv_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{rv_2} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3+1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{n}_E = \overrightarrow{rv_1} \times \overrightarrow{rv_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$E: x_1 + 2x_2 - 3x_3 = d \quad \Big| \quad \text{Punktprobe mit } A(2|-1|-2)$$

$$E: 2 + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) = d \Rightarrow d = 6$$

$$E: x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$$

### Lösung A8

- 1) Man stellt die Gleichung einer Hilfsgeraden  $g$  auf, die orthogonal zu  $E$  ist und den Punkt  $P$  enthält. Der Normalenvektor von  $E$  ist dabei Richtungsvektor von  $g$ .
- 2) Man schneidet  $g$  mit  $E$  und bestimmt die Koordinaten des Schnittpunktes  $D$ .
- 3) Der Ortsvektor  $\overrightarrow{OP'}$  bestimmt sich dann aus  

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PD}$$

