Aufgabe A1
Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{8}sin(4x^2)$.

Aufgabe A2
Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}x^3$ an.

Aufgabe A3
Die Funktion f mit $f(x)=x^3-3x^2-x+3$ hat die Nullstelle $x_1=1$. Bestimmen Sie die weiteren Nullstellen.

Aufgabe A4
Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x–Achse im Ursprung. Der Punkt $H(1|1)$ ist der Hochpunkt des Schaubilds. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

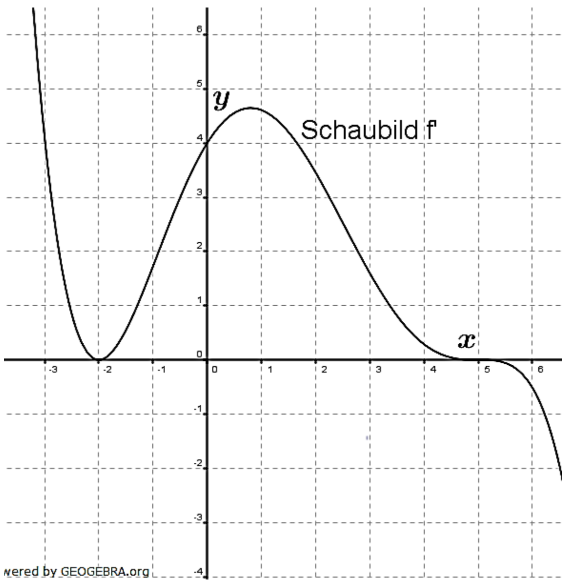
Aufgabe A5
Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er richtig, falsch oder nicht entscheidbar ist.

(1) Das Schaubild von f hat bei $x=-2$ einen Tiefpunkt.

(2) Das Schaubild von f hat für $-3\leq x\leq 6$ genau zwei Wendepunkte.

(3) Das Schaubild von f verläuft im Schnittpunkt mit der y–Achse steiler als die erste Winkelhalbierende.

(4) $f(0)>f(5)$.



Aufgabe A6
Gegeben sind die Ebene

$E:\ -2x_1+x_2-2x_3+15=0$ und die Gerade

$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-16\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix};\ t\in\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass E zu g parallel ist.

b) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g von der Ebene E.

Aufgabe A7

Gegeben sind die Ebene E_1 und E_2 mit

$E_1\colon\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$

$E_2\colon\ 3x_1 + 2x_2 = 6$

Stellen Sie die beiden Ebenen in einem Koordinatensystem dar. Zeichnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen ohne weitere Rechnung ein.

Aufgabe A8

Gegeben sind zwei Punkte A und B. Diese liegen bezüglich einer Ebene E symmetrisch.

Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung einer Gleichung von E.

Lösung A1

$f(x) = \frac{1}{8} \cdot sin(4x^2)$ Kettenregel erforderlich

---

$f'(u \circ v) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$
$u = 4x^2 \quad u' = 8x$
$v(u(x)) = \frac{1}{8} sin(u) \quad v'(u(x)) = \frac{1}{8} cos(u)$
$f'(x) = \frac{1}{8} \cdot 8x \cdot \cos(4x^2)$
$f'(x) = xcos(4x^2)$

Lösung A2

$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^3$ Summenregel mit Potenzregel erforderlich

---

$$F(x) = \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^3\right) dx = \int \left(4 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^3\right) dx = \frac{4x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2 \cdot 4}x^4 + c$$

$F(x) = 8\sqrt{x} + \frac{1}{8}x^4 + c$

Lösung A3

$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ mit $x_1 = 1$ Polynomdivision, quadratische Gleichung

---

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 - x + 3) : (x - 1) = x^2 - 2x - 3 \\
\underline{-x^3 + x^2} \\
\quad -2x^2 - x \\
\quad \underline{+2x^2 - 2x} \\
\qquad -3x + 3 \\
\qquad \underline{+3x - 3} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x^2 - 2x - 3 = 0$
$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$ | p/q-Formel
$x_2 = 3; \quad x_3 = -1$
$\mathbb{L} = \{-1; 3; 1\}$

Lösung A4

Lösungslogik:
Die allgemeine Gleichung einer ganzrationalen Funktion lautet:
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Wegen des Berührpunktes im Ursprung ist $d = 0$, außerdem ist dieser Berührpunkt einer doppelte Nullstelle, sodass sich die Gleichung reduziert auf:
$f(x) = ax^2(x + x_3) = ax^3 + bx^2$.
Wegen des Hochpunktes in $P(1|1)$ ist außerdem $f'(1) = 0$.

Klausuraufschrieb:
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Berührpunkt im Ursprung: $\Longrightarrow \; d = 0;\; f(x) = ax^2(x + x_3) = ax^3 + bx^2$
Hochpunkt in $P(1|1)$: $\Longrightarrow \; f(1) = 1 \wedge f'(1) = 0$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$
$f(1) = a + b = 1 \Longrightarrow \; a = 1 - b$
$f'(1) = 3a + 2b = 0$
$a \longrightarrow f'(1) \Longrightarrow \; 3(1 - b) + 2b = 0$
$3 - 3b + 2b = 0 \Longrightarrow \; b = 3$
$b \longrightarrow a$
$1 - 3 = a \Longrightarrow \; a = -2$
$f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Lösung A5

(1) *Das Schaubild von f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.*
Die Aussage ist falsch. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle $x = -2$ einen Extrempunkt. Nur Wendestellen einer Stammfunktion führen zu Extremstellen bei der Ableitungsfunktion. Wegen des Berührpunkts von f' mit der x–Achse liegt in f sogar ein Sattelpunkt vor.

(2) *Das Schaubild von f hat für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Wendepunkte.*
Die Aussage ist wahr. f' hat im angegebenen Intervall genau zwei Extremstellen, die bei f zu Wendepunkten führen.

(3) *Das Schaubild von f verläuft im Schnittpunkt mit der y–Achse steiler als die erste Winkelhalbierende.*
Die Aussage ist wahr. Aus dem Schaubild von f' liest man für $x_0 = 0$ die Steigung $m = 4$ von f ab. Die 1. Winkelhalbierende hat die Steigung $m = 1$.

(4) $f(0) > f(5)$.
Die Aussage ist falsch. Die Ableitungskurve f' verläuft im angegebenen Intervall oberhalb der x–Achse, f ist in diesem Intervall somit streng monoton steigend. $f(0)$ muss somit kleiner als $f(5)$ sein.

Lösung A6

Lösungslogik

a) $E \parallel g$, wenn $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

b) Abstand Punkt-Ebene mithilfe der HNF.

Klausuraufschrieb

a) $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{rv_g} = 0$
$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 4 - 2 = 0$$
E ist parallel zu g.

b) $d = \left|\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 + d}{|\overrightarrow{n_E}|}\right|$ mit z. B. dem Aufpunkt der Geraden.
$$d = \left|\frac{-2\cdot 2 - 16 - 2\cdot 2 + 15}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 (-2)^2}}\right| = \left|\frac{-9}{\sqrt{9}}\right| = 3$$
Der Abstand der Geraden g von der Ebene E beträgt $3\,LE$.

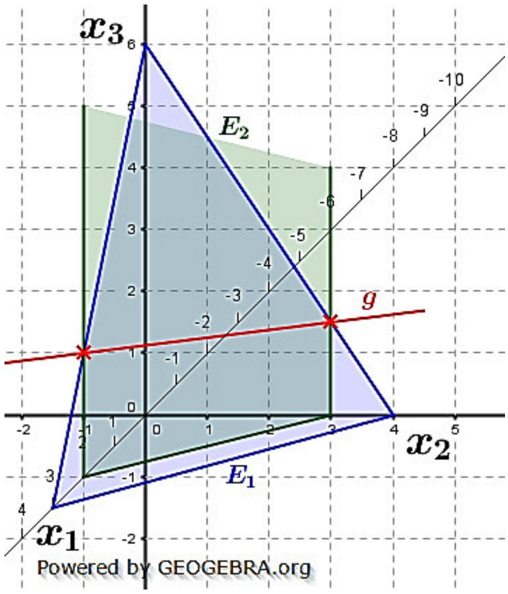
Lösung A7

Lösungslogik

Ermittlung der Spurpunkte von E_1.
Ermittlung der Spurpunkte von E_2.
Da bei E_2 die x_3–Koordinate fehlt, hat E_2 keinen Schnittpunkt mit der x_3–Achse, zwei Spurgeraden verlaufen parallel zur x_3–Achse.
Diese parallelen Spurgeraden schneiden die Spurgeraden der Ebene E_1 in den Punkten A und B.
Die Verbindungsgerade von A und B ist die Schnittgerade der beiden Ebenen.

Klausuraufschrieb

E_1: $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$
S_1 : $4x_1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 12 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$
$S_1(3|0|0)$
S_2 : $4 \cdot 0 + 3x_2 + 2 \cdot 0 = 12 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4$
$S_2(0|4|0)$
S_3 : $4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot x_3 = 12 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 6$
$S_3(0|0|6)$
E_2: $3x_1 + 2x_2 = 6$
T_1 : $3x_1 + 2 \cdot 0 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$
$T_1(2|0|0)$
T_2 : $3 \cdot 0 + 2x_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$
$T_2(0|3|0)$



Lösung A8

Da A und B symmetrisch zur Ebene E liegen, liegt der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ mit $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. auf E. Gleichzeitig ist $\overrightarrow{AB}$ der Normalenvektor von E, sodass die Ebene beschrieben werden kann mit E: $\left(\vec{x} - \overrightarrow{OM}\right) \circ \overrightarrow{AB} = 0$.