Abituraufgaben allg. bildendes Gymnasium Pflichtteil 2007 BW

Aufgabe A1
Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (1 + sin(x))^2$.

Aufgabe A2
Berechnen Sie das Integral $\int_0^{ln(2)} e^{2x} dx$.

Aufgabe A3
Lösen Sie die Gleichung $e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0$.

Aufgabe A4
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

a) Bestimmen Sie die Punkte des Schaubilds von f mit waagrechter Tangente.

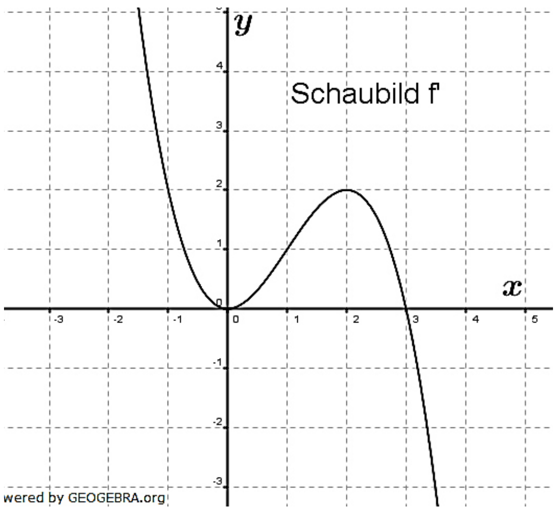
b) Das Schaubild von f hat im Punkt $P\left(1 \middle| \frac{1}{2}\right)$ die Normale n. Ermitteln Sie die Gleichung von n.

Aufgabe A5
Gegeben ist das Schaubild der Ableitung f' der Funktion f.

a) Welche Aussagen über die Funktion f ergeben sich daraus im Hinblick auf
- Monotonie,
- Extremstellen
- Wendestellen?

Begründen Sie Ihre Aussagen.

b) Es gilt $f(0) = 2$. Skizzieren Sie das Schaubild von f.



Aufgabe A6
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$
$$x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -21$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

Aufgabe A7

Gegeben sind die Ebene E und F mit

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\ r,s\ \in\ \mathbb{R}$$

$$F:\ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = 0$$

Zeigen Sie, dass die Ebenen E und F parallel sind. Bestimmen Sie den Abstand der Ebenen.

Aufgabe A8

Von einem senkrechten Kegel kennt man die Koordinaten der Spitze S, die Koordinaten eines Punktes P des Grundkreises sowie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der der Grundkreis liegt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Mittelpunkt M und den Radius r des Grundkreises zu bestimmen.

Lösung A1

$f(x) = (1+\sin(x))^2$ Kettenregel erforderlich

$f'(u \circ v) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$
$u = 1 + sin(x) \qquad u' = cos(x)$
$v(u(x)) = u^2 \qquad v'(u(x)) = 2u$
$f'(x) = 2 \cdot (1 + sin(x)) \cdot cos(x)$
$f'(x) = 2cos(x) \cdot (1 + sin(x))$

Lösung A2

$\int_0^{ln(2)} e^{2x} dx$ lineare Substitution

$$\int_0^{ln(2)} e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} \cdot e^{2x}\right]_0^{ln(2)} = \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot ln(2)} - \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = 1{,}5$$

Lösung A3

$e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0$ Substitution und quadratische Gleichung

---

$e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0$ | $\cdot\, \boldsymbol{e^x}$ (Beseitigung des Nenners)
$e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$
Substitution:
$e^x = z$
$z^2 - 2z - 15 = 0$ | quadratische Gleichung
$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+15}$ | p/q-Formel
$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{16} = 1 \pm 4$
$z_1 = 5;\;\; z_2 = -3$
Resubstitution:
$e^{x_1} = 5 \quad \Longrightarrow \quad x_1 ln(e) = ln(5) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = ln(5)$
$e^{x_2} = -3 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{L} = \{\}$
$\mathbb{L} = \{\ln(5)\}$

Lösung A4

Lösungslogik:
Bedingung für Punkte mit waagrechter Tangente: $f'(x) = 0$
$f'(x)$ über die Quotientenregel
Normale n in $P\left(1\middle|\frac{1}{2}\right)$ über $f'(1)$, Orthogonalitätsbedingung und Punktsteigungsformel.

Klausuraufschrieb:

a) $u = x^2$ $\quad u' = 2x$

$v = x + 1$ $\quad v' = 1$

$f'(x) = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ | Quotientenregel

$x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow \; x(x+2) = 0$

$x_1 = 0; \; x_2 = -2$

$f(x_1) = 0; \; f(x_2) = -4$

Punkte mit waagrechter Tangente $P_1(0|0); \; P_2(-2|-4)$

b) $f'(1) = \frac{1+2}{2^2} = \frac{3}{4}$

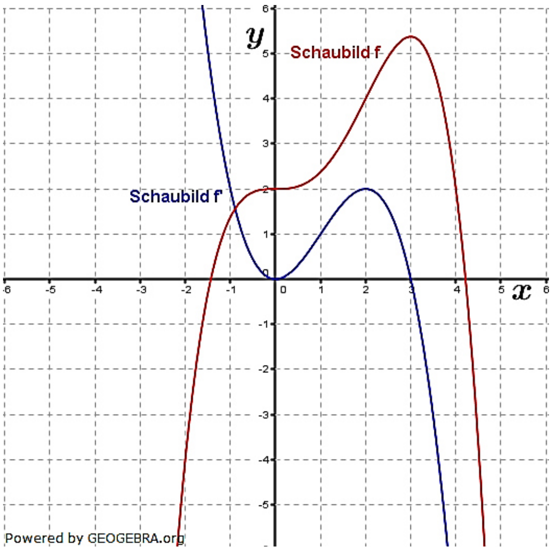
$n(x) = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x-1) + \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}(x-1) + \frac{1}{2}$

$n(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{6}$

Lösung A5

a) f ist für $x \leq 3$ monoton steigend und für $x > 3$ streng monoton fallend. f' verläuft für $x \leq 3$ oberhalb und für $x > 3$ unterhalb der x–Achse.
f hat bei $x = 3$ eine Extremstelle. f' hat bei $x = 3$ eine Nullstelle mit Vorzeichen-wechsel von $+$ nach $-$. Die Extremstelle ist also ein Hochpunkt.
f hat zwei Wendepunkte bei $x = 0$ und $x = 2$. Wendepunkte von f führen zu Extremstellen von f'. Wegen der doppelten Nullstelle von f' bei $x = 0$ ist der Wendepunkt von f bei $x = 0$ ein Sattelpunkt.

b) $f(x) = \int f'(x)dx + 2$
Der Graph von f kommt aus dem III. Quadranten, hat in $S_y(0|2)$ einen Sattelpunkt, verläuft weiter im I. Quadranten über einen Wendepunkt bei $x = 2$, einen Hochpunkt bei $x = 3$ und verläuft dann in den IV. Quadranten.



Lösung A6

Lösungslogik

Wegen des Pflichtteils ist hier die Verwendung eines GTR ausgeschlossen, das Gleichungssystem muss manuell gelöst werden nach dem Gaußschen Eliminierungsverfahren.
Das Gleichungssystem reduziert sich auf nur zwei Gleichungen mit drei Unbekannten. Wir dürfen somit einen Parameter frei wählen.

Klausuraufschrieb

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	3	-1	2	7	
II	1	2	3	14	$\mathrm{II} \cdot (-3) + \mathrm{I}$
III	1	-5	-4	-21	$\mathrm{III} \cdot (-3) + \mathrm{I}$

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	3	-1	2	7	
II‘	0	-7	-7	-35	
III‘	0	14	14	70	$\mathrm{IIIII}' + 2 \cdot \mathrm{II}$

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	3	-1	2	7	
II‘	0	-7	-7	-35	
III‘‘	0	0	0	0	

Reduziertes Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten.

$x_3 = t$

$-7x_2 - 7t = -35 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 5 - t$

$3x_1 - (5 - t) + 2t = 7 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 4 - t$

$\mathbb{L} = \{x_1|x_2|x_3|(4 - t|5 - t|t)\}$

Die drei Ausgangsgleichungen des LGS stellen drei Ebenen im Raum dar, die sich in der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \ t \in \mathbb{R}$ schneiden.

Lösung A7

Lösungslogik

Wenn $E \| F$ ist, müssen die Normalenvektoren von E und F identisch bzw. ein Vielfaches voneinander sein. Wir bilden den Normalenvektor von E über das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren.

Der Abstand der beiden Ebenen ermittelt sich über die HNF von F und dem Aufpunkt von E.

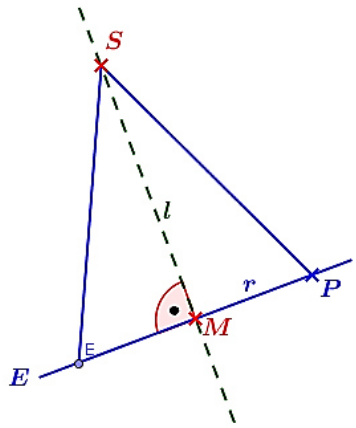
Klausuraufschrieb

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{rv_1} \times \overrightarrow{rv_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{n_F} \Longrightarrow$ E und F sind parallel.

$$d = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}} \cdot \left| \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{-2-2}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

Lösung A8



1) Mit der Koordinatengleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ist der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ der Ebene E gegeben. Das Lot l von S auf E hat $\vec{n}$ als Richtungsvektor.
2) Der Schnittpunkt von l mit E ist der Mittelpunkt M des Grundkreises.
3) Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{MP}$ ist der Radius des Grundkreises.