

Lösung A1

$$f(x) = (1 + \sin(x))^2$$

Kettenregel erforderlich

$$\begin{aligned} f'(u \circ v) &= v'(u(x)) \cdot u'(x) \\ u &= 1 + \sin(x) & u' &= \cos(x) \\ v(u(x)) &= u^2 & v'(u(x)) &= 2u \\ f'(x) &= 2 \cdot (1 + \sin(x)) \cdot \cos(x) \\ f'(x) &= 2\cos(x) \cdot (1 + \sin(x)) \end{aligned}$$

Lösung A2

$$\int_0^{\ln(2)} e^{2x} dx$$

lineare Substitution

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln(2)} e^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2} \cdot e^{2x} \right]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot \ln(2)} - \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = 1,5 \end{aligned}$$

Lösung A3

$$e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0$$

Substitution und quadratische Gleichung

$$e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0 \quad | \cdot e^x \text{ (Beseitigung des Nenners)}$$

$$e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$$

Substitution:

$$e^x = z$$

$$z^2 - 2z - 15 = 0 \quad | \quad \text{quadratische Gleichung}$$

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 15} \quad | \quad p/q\text{-Formel}$$

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{16} = 1 \pm 4$$

$$z_1 = 5; z_2 = -3$$

Resubstitution:

$$e^{x_1} = 5 \Rightarrow x_1 \ln(e) = \ln(5) \Rightarrow x_1 = \ln(5)$$

$$e^{x_2} = -3 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$$

$$\mathbb{L} = \{\ln(5)\}$$

Lösung A4

Lösungslogik:

Bedingung für Punkte mit waagrechter Tangente: $f'(x) = 0$

$f'(x)$ über die Quotientenregel

Normale n in $P\left(1 \mid \frac{1}{2}\right)$ über $f'(1)$, Orthogonalitätsbedingung und Punktsteigungsformel.

Klausuraufschrieb:

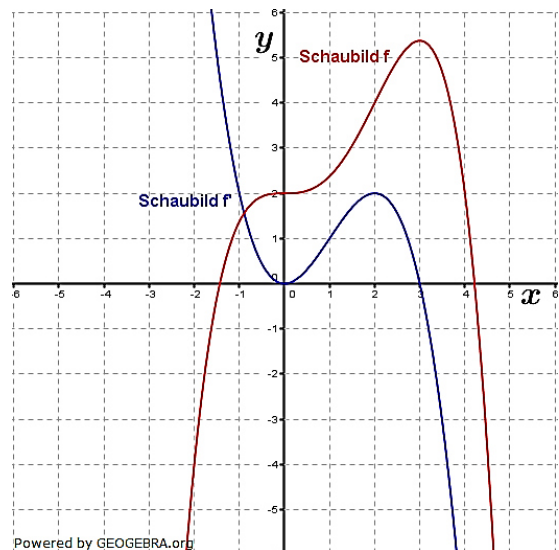
a) $u = x^2$ $u' = 2x$
 $v = x + 1$ $v' = 1$
 $f'(x) = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ | Quotientenregel
 $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0$
 $x_1 = 0; x_2 = -2$
 $f(x_1) = 0; f(x_2) = -4$
 Punkte mit waagrechter Tangente $P_1(0|0); P_2(-2|-4)$

b) $f'(1) = \frac{1+2}{2^2} = \frac{3}{4}$
 $n(x) = -\frac{1}{f'(1)} \cdot (x - 1) + \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}(x - 1) + \frac{1}{2}$
 $n(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{6}$

Lösung A5

a) f ist für $x \leq 3$ monoton steigend und für $x > 3$ streng monoton fallend. f' verläuft für $x \leq 3$ oberhalb und für $x > 3$ unterhalb der x -Achse. f hat bei $x = 3$ eine Extremstelle. f' hat bei $x = 3$ eine Nullstelle mit Vorzeichen-wechsel von $+$ nach $-$. Die Extremstelle ist also ein Hochpunkt. f hat zwei Wendepunkte bei $x = 0$ und $x = 2$. Wendepunkte von f führen zu Extremstellen von f' . Wegen der doppelten Nullstelle von f' bei $x = 0$ ist der Wendepunkt von f bei $x = 0$ ein Sattelpunkt.

b) $f(x) = \int f'(x)dx + 2$
 Der Graph von f kommt aus dem III. Quadranten, hat in $S_y(0|2)$ einen Sattelpunkt, verläuft weiter im I. Quadranten über einen Wendepunkt bei $x = 2$, einen Hochpunkt bei $x = 3$ und verläuft dann in den IV. Quadranten.



Lösung A6

Lösungslogik

Wegen des Pflichtteils ist hier die Verwendung eines GTR ausgeschlossen, das Gleichungssystem muss manuell gelöst werden nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

Das Gleichungssystem reduziert sich auf nur zwei Gleichungen mit drei Unbekannten. Wir dürfen somit einen Parameter frei wählen.

Klausuraufschrieb

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	3	-1	2	7	
II	1	2	3	14	II · (-3) + I
III	1	-5	-4	-21	III · (-3) + I

Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	3	-1	2	7	
II'	0	-7	-7	-35	
III'	0	14	14	70	IIII' + 2 · II

Nr.	x_1	x_2	x_3	=	Operation
I	3	-1	2	7	
II'	0	-7	-7	-35	
III''	0	0	0	0	

Reduziertes Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten.

$$\begin{aligned}
 x_3 &= t \\
 -7x_2 - 7t &= -35 & \Rightarrow x_2 &= 5 - t \\
 3x_1 - (5 - t) + 2t &= 7 & \Rightarrow x_1 &= 4 - t
 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{x_1|x_2|x_3|(4 - t|5 - t|t)\}$

Die drei Ausgangsgleichungen des LGS stellen drei Ebenen im Raum dar, die sich

in der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ schneiden.

Lösung A7

Lösungslogik

Wenn $E \parallel F$ ist, müssen die Normalenvektoren von E und F identisch bzw. ein Vielfaches voneinander sein. Wir bilden den Normalenvektor von E über das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren.

Der Abstand der beiden Ebenen ermittelt sich über die HNF von F und dem Aufpunkt von E .

Klausuraufschrieb

$$k \cdot \vec{n}_E = \vec{r}v_1 \times \vec{r}v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{n}_E = \vec{n}_F \Rightarrow E$ und F sind parallel.

$$d = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}} \cdot \left| \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{-2-2}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

Lösung A8

- 1) Mit der Koordinatengleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ist der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ der Ebene E gegeben. Das Lot l von S auf E hat \vec{n} als Richtungsvektor.
- 2) Der Schnittpunkt von l mit E ist der Mittelpunkt M des Grundkreises.
- 3) Der Betrag des Vektors \overline{MP} ist der Radius des Grundkreises.

