

Lösung A1

$$f(x) = \frac{2x^2}{2x^2-3}$$

Quotientenregel erforderlich

$$f'\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$u = 2x^2 \quad u' = 4x$$

$$v = 2x^2 - 3 \quad v' = 4x$$

$$f'(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 - 3) - 4x \cdot 2x^2}{(2x^2 - 3)^2} = \frac{8x^3 - 12x - 8x^3}{(2x^2 - 3)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{12x}{(2x^2 - 3)^2}$$

Lösung A2

$$g(x) = 2 - 3 \cdot \sin(4x)$$

lineare Substitution

$$G(x) = \int (2 - 3 \cdot \sin(4x)) dx = 2x - \frac{3 \cdot (-\cos(4x))}{4} + c = 2x + \frac{3}{4} \cos(4x) + c$$

Punktprobe mit $P(0|1)$:

$$1 = 2 \cdot 0 + \frac{3}{4} \cos(4 \cdot 0) + c$$

$$1 = 2 \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 1 + c \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

Der Funktionsterm für G lautet $G(x) = 2x + \frac{3}{4} \cos(4x) + \frac{1}{4}$.

Lösung A3

$$\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 1$$

Substitution und quadratische Gleichung

$$\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 1$$

| $\cdot x^4$ (Beseitigung des Nenners)

$$6 + x^2 - x^4 = 0$$

Substitution:

$$x^2 = z$$

$$z^2 - z - 6 = 0$$

| quadratische Gleichung

$$z_{1,2} = 0,5 \pm \sqrt{0,25 + 6}$$

| p/q-Formel

$$z_{1,2} = 0,5 \pm \sqrt{6,25} = 0,5 \pm 2,5$$

$$z_1 = 3; \quad z_2 = -2$$

Resubstitution:

$$x_{1,2}^2 = 3 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3} \Rightarrow x_2 = -\sqrt{3}$$

$$x_{3,4}^2 = -2 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$$

$$\mathbb{L} = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$$

Lösung A4

Lösungslogik:

Ganzrationale Funktion zweiten Grades ist eine Parabel mit einer einzigen Extremstelle, die gleichzeitig Scheitelpunkt ist.

Wir stellen die Scheitelpunktgleichung $h(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ der Parabel auf. Punktprobe mit $Q(2|5)$ liefert den Wert für die Streckung a .

Klausuraufschrieb:

$$h(x) = a(x - x_s)^2 + y_s \text{ mit } T(-1|-4) \text{ als Scheitel.}$$

$$h(x) = a(x + 1)^2 - 4$$

$$h(2) = a(2 + 1)^2 - 4 = 5 \Rightarrow a = 1$$

$$h(x) = (x + 1)^2 - 4 = x^2 + 2x + 1 - 4$$

$$h(x) = x^2 + 2x - 3$$

Lösung A5

$$f(x) = \frac{-2x}{x+a}, \quad g(x) = -2 + b \cdot e^{-0,5x}, \quad h(x) = c \cdot x^2 - x$$

- a) $f(x)$ ist eine gebrochen rationale Funktion. Höchste Potenz von x im Zähler ist gleich der höchsten Potenz von x im Nenner. Der Graph der Funktion hat eine waagrechte Asymptote bei $y = \frac{-2x}{x} = -2$. Die Funktion hat eine Definitions-lücke für $x = -a$; $a > 0$ bzw. $x = |a|$; $a < 0$. Nur Schaubild 2 hat sowohl eine waagrechte als auch senkrechte Asymptote. Schaubild 2 ist der Graph der Funktion f .

$g(x)$ ist eine Exponentialfunktion mit einer Schranke bei $y = -2$ und einer Nullstelle $N_1(-2 + b \cdot 1 = 0|0)$. Schaubild 3 ist der Graph der Funktion g .

$h(x)$ ist eine Parabel mit den Nullstellen $N_1(0|0)$ und $N_2(\frac{1}{c}|0)$. Schaubild 4 ist der Graph der Funktion h .

- b) Aus den Erläuterungen zu a) leiten wir ab:

$$a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = \frac{1}{6}$$

Lösung A6

Lösungslogik

Der Abstand zweier Geraden im Raum errechnet sich über $d = \frac{|\vec{rv_g} \times \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{rv_g}|}$ mit $\vec{rv_g}$ als Richtungsvektor der ersten Geraden, P_1 als Aufpunkt der ersten und P_2 als Aufpunkt der zweiten Geraden.

Klausuraufschrieb

$$d = \frac{|\vec{rv_g} \times \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{rv_g}|} \quad \vec{rv_g} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-9 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -25 \end{pmatrix}$$

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -25 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-25)^2}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{250}}{\sqrt{26}} = 5$$

Der Abstand der beiden Geraden beträgt 5 LE.

Lösung A7

Lösungslogik

Wir berechnen den Normalenvektor der Ebene E über das Kreuzprodukt aus den beiden Richtungsvektoren.

$E \parallel g$ wenn $\vec{rv}_g \perp \vec{n}_E$ (Orthogonalitätsbedingung).

Klausuraufschrieb

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \begin{pmatrix} 0 - 1,5 \\ 3 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{AC} &= \begin{pmatrix} 0 - 1,5 \\ 0 - 0 \\ 6 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \\ k \cdot \vec{n}_E &= \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 4,5 \end{pmatrix} = 4,5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{rv}_g \circ \vec{n}_E &= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -8 + 6 + 2 = 0\end{aligned}$$

Die Gerade g verläuft parallel zur Ebene E .

Lösung A8

Um die gegenseitige Lage der beiden Ebenen $E_1: (\vec{x} - \vec{p}_1) \circ \vec{n}_1 = 0$ und $E_2: (\vec{x} - \vec{p}_2) \circ \vec{n}_2 = 0$ zu untersuchen, prüft man zunächst, ob die beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ Vielfache voneinander sind.

- Falls nein, sind die Ebenen nicht parallel zueinander und **schneiden sich in einer Geraden**.
- Falls ja, sind die beiden Ebenen **parallel**.

Erfüllt darüber hinaus der Punkt P_2 aus E_2 (oder ein anderer Punkt aus E_2) auch die Gleichung von E_1 , d.h. $(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \circ \vec{n}_1 = 0$, so sind die beiden Ebenen **identisch**.