Lösung A1

$f(x) = (2 - 3x) \cdot e^{-x}$ Produktregel erforderlich

$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$
$u = 2 - 3x \quad u' = -3$
$v = e^{-x} \quad v' = -e^{-x}$
$f'(x) = -3 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} - e^{-x} \cdot (2 - 3x)$
$f'(x) = e^{-x} \cdot (3x - 5)$

Lösung A2

$\int_1^e \left(\frac{2}{x} + 4x\right) dx$ Summenregel mit Potenzregel erforderlich

---

$$\int_1^e \left(\frac{2}{x} + 4x\right) dx = [2ln(x) + 2x^2]_1^e = (2 \cdot ln(e) + 2e^2 - (2 \cdot ln(1) + 2)$$
$$= (2 + 2e^2 - 0 - 2) = 2e^2$$

Lösung A3

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ mit $x_1 = 1$ Polynomdivision, quadratische Gleichung

---

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (2x^3 + 3x^2 - 8x + 3) : (x - 1) = 2x^2 + 5x - 3 \\ \underline{-(-2x^3 - 2x^2)} \\ \quad 5x^2 - 8x \\ \quad \underline{-(5x^2 - 5x)} \\ \qquad -3x + 3 \\ \qquad \underline{-(-3x + 3)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$2x^2 + 5x - 3 = 0 \quad | \quad :2$
$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$
$x_{2,3} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{3}{2}} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25+24}{16}} \quad | \quad p/q$-Formel
$x_{2,3} = -\frac{5}{4} \pm \frac{7}{4}$
$x_2 = \frac{1}{2}; \quad x_3 = -3$
$\mathbb{L} = \left\{-3; \frac{1}{2}; 1\right\}$

Lösung A4

Lösungslogik:
Asymptoten:
Wir untersuchen die Definitionslücken von f sowie das globale Verhalten für $x \longrightarrow \pm\infty$.
Berechnung der y–Koordinate des Punktes P über $f(1)$.
Berechnung der Steigung im Punkt P über $f'(1)$.
Aufstellung der Tangentengleichung $t(x)$ über die Punktsteigungsformel.
Schnittpunkt von $t(x)$ mit der x–Achse über $t(x) = 0$.

Klausuraufschrieb:
$\mathbb{D} = x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\Rightarrow$ Das Schaubild hat die senkrechte Asymptote (Pol) $x = 0$.
$\lim\limits_{x \to |\infty|} f(x) = -4 \Rightarrow$ Das Schaubild hat die waagrechte Asymptote $y = -4$.

$f(1) = 1 - \frac{4}{1} = -3 \;\Rightarrow\; P(1|-3)$

$u = 1 - 4x^2$ $\qquad$ $u' = -8x$
$v = x^2$ $\qquad$ $v' = 2x$

$f'(x) = \frac{-8x \cdot x^2 - 2x(1-4x^2)}{x^4} = \frac{-2x}{x^4}$ $\qquad$ | Quotientenregel
$f'(1) = -2$
$t(x) = -2 \cdot (x-1) - 3$ $\qquad$ | Punkt-Steigungs-Formel für $P(x_P|y_P)$
$t(x) = -2x - 1$
$t(x) = 0 = -2x - 1 \Rightarrow \; x = -\frac{1}{2}$
Schnittpunkt mit der x–Achse ist $N\left(-\frac{1}{2}\middle|0\right)$

Lösung A5

a) Die Funktion x ist wegen des Nenners $1 + x^2$ achsensymmetrisch. Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a}{1+x^2} = 0$ hat sie die waagrechte Asymptote $y = -1$. Dies ist nur in Abbildung 2 der Fall.
Der Graph der Funktion schneidet die y–Achse in $S_y(0|2)$, also $f(0) = 2$.
$2 = \frac{a}{1+0} - 1 \quad \Rightarrow \quad a = 3$

b) Extrempunkte von f führen zu Nullstellen von f'. f besitzt eine einzige Extremstelle bei $x = 0$ als Hochpunkt. Die Nullstelle von f' muss also einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ aufweisen. Dies ist nur in Abbildung 3 der Fall.
Abbildung 3 ist das Schaubild der Ableitungsfunktion f'.
Extremstellen der Stammfunktion führen zu Nullstellen der Ableitungsfunktion. Wendepunkte der Stammfunktion führen zu Extremstellen der Ableitungsfunktion. Dies ist sowohl in Abbildung 1 als auch in Abbildung 4 der Fall.
Wegen $I(x) = \int_2^x f(t)dt$ muss gelten $I(2) = \int_2^2 f(t)dt$. Da jedoch $\int_2^2 f(t)dt = 0$, muss $I(2) = 0$ sein. Dies ist nur in Abbildung 4 der Fall.
Abbildung 4 ist das Schaubild der Integralfunktion I.

Lösung A6

Lösungslogik

Vier Punkte liegen dann in einer Ebene, wenn der Betrag des Spatproduktes der drei Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, und $\overrightarrow{AD}$ gleich Null ist. Der Betrag des Spatproduktes aus drei Vektoren ist gleich dem Volumen des durch die Vektoren aufgespannten Parallelepipeds. Ist dieses Volumen gleich Null, so sind die drei Vektoren voneinander abhängig, also liegen die vier Punkte in einer Ebene.

Klausuraufschrieb

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-4 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ -2-4 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 9-4 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AD}\right| = \left|\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = |36 - 20 - 16| = 0$$

Die vier Punkte liegen in einer Ebene.

Lösung A7

Lösungslogik

a) Abstand Punkt/Ebene über die HNF mit $P(9|-4|1)$.

b) Die Koordinaten des Punktes Q ergeben sich dann über $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PS}$ bzw. $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{PS}$.

Klausuraufschrieb

a) $d = \frac{ax_1+bx_2+cx_3+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{3x_1-4x_3+7}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}}$ | Punkt $P(9|-4|1)$ einsetzen

$d = \frac{3\cdot 9-4\cdot 1+7}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}} = \frac{27-4+7}{5} = 6$

Der Punkt P hat einen Abstand von $6\,LE$ zur Ebene E.

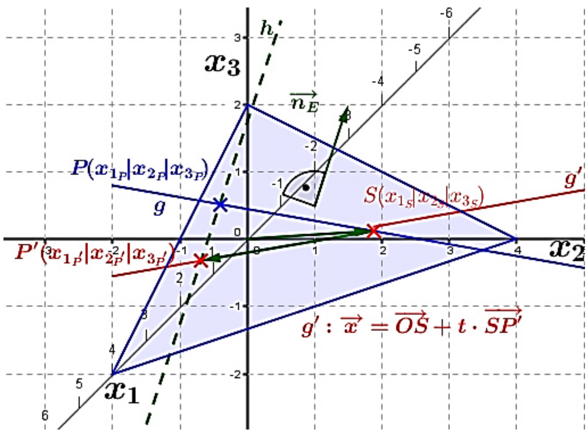
b) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

alternativ

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten sind $Q(-11|6|1)$.

Lösung A8



Ein mögliches Verfahren zur Bestimmung der Bildgeraden g' ist:
Der Punkt S liegt auch auf der Bildgeraden g'.
Man wählt einen weiteren Punkt P auf der Geraden g und bestimmt eine Gleichung der Geraden h, die orthogonal zu E ist und P enthält. Als Richtungsvektor von h wählt man den Normalenvektor von E.
Danach ermittelt man den Schnittpunkt T von h mit E.
Für den Bildpunkt P' von P bei der Spiegelung an E gilt:
$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PT}$
Die Bildgerade ist schließlich gegeben durch g: $\vec{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \overrightarrow{SP'}$