Lösung A1

$f(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$ Quotientenregel erforderlich

$f'\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$u = sin(2x)$ $u' = 2cos(2x)$

$v = x$ $v' = 1$

$f'(x) = \frac{2x \cdot cos(2x) - sin(2x)}{x^2}$

Lösung A2

$\int_0^1 (2x-1)^4 dx$ Potenzregel mit linearer Substitution

$$\int_0^1 (2x-1)^4 dx = \left[\frac{(2x-1)^5}{5 \cdot 2}\right]_0^1$$
$$= \left(0{,}1 - (-0{,}1)\right) = 0{,}2$$

Lösung A3

$4e^{2x} + 6e^x = 4$ Substitution und quadratische Gleichung

Substitution:

$e^x = z$

$4z^2 + 6z - 4 = 0$ | quadratische Gleichung

$z^2 + \frac{3}{2}z - 1 = 0$ | p/q-Formel

$z_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9+16}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$

$z_1 = \frac{1}{2}; \quad z_2 = -2$

Resubstitution:

$e^{x_1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 \cdot ln(e) = ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln(2)$

$e^{x_2} = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{\}$

$\mathbb{L} = \{-ln(2)\}$

Lösung A4

<u>Lösungslogik</u>

a) Beschreibung siehe Klausuraufschrieb.

b) Doppelte Punktprobe mit $P(0|1)$ auf f und g.
Berechnung der Steigung von f und g im Schnittpunkt.

Klausuraufschrieb

a) Das Schaubild von g geht aus dem Schaubild von f hervor durch:
   1. Spiegelung an der x– und y–Achse,
   2. Verschiebung um zwei Stellen nach oben.

b) $f(0) = e^0 = 1$
   $g(0) = -e^0 + 2 = -1 + 2 = 1$
   Wegen $f(0) = g(0)$ liegt P sowohl auf f als auch auf g.
   $f'(x) = e^x;\ f'(0) = 1$
   $g'(x) = e^{-x};\ g'(0) = 1$
   f und g berühren sich im Punkt $P(0|1)$.

Lösung A5

Klausuraufschrieb

(1) Die Funktionswerte des Schaubildes von f sind für $-3 \leq x \leq 1$ positiv, also ist F in diesem Bereich monoton wachsend.

(2) f hat für $-3{,}5 \leq x \leq 3{,}5$ zwei Extremstellen und einen Sattelpunkt. Also hat f' in diesem Bereich drei Nullstellen, wobei die Nullstelle bei $x_0 = 0$ (Sattelpunkt) sogar eine doppelte Nullstelle ist.

(3) $\int_0^3 f'(x)dx = f(3) - f(0)$. Aus dem Schaubild liest man ab:
   $f(3) = 0$ und $f(0) = 1$, also $f(3) - f(0) = -1 = \int_0^3 f'(x)dx$

(4) $O(0|0)$ ist Sattelpunkt von f. Dieser führt zu einem Extremwert, der die x–Achse berührt, und gleichzeitig zu einer Nullstelle bei f' wird. Die Steigung links und rechts des Sattelpunktes ist negativ, also berührt die Extremstelle von f' die x–Achse von unten, es liegt kein Vorzeichenwechsel vor, der Extrempunkt muss ein Hochpunkt sein.

Lösung A6

Lösungslogik

Wegen des Pflichtteils ist hier die Verwendung eines GTR ausgeschlossen, das Gleichungssystem muss manuell gelöst werden nach dem Gaußschen Eliminierungsverfahren.
Das Gleichungssystem reduziert sich auf nur zwei Gleichungen mit drei Unbekannten. Wir dürfen somit einen Parameter frei wählen.

Klausuraufschrieb

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	-5	1	-3	7	
II	5	-3	-1	-11	$\mathrm{II} + \mathrm{I}$
III	1	0	1	-1	$\mathrm{III} \cdot 5 + \mathrm{I}$

Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	-5	1	-3	7	
II‘	0	-2	-4	-4	
III‘	0	1	2	2	$\mathrm{III}' \cdot 2 + \mathrm{II}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Gauß-Schema					
Nr.	x_1	x_2	x_3	$=$	Operation
I	-5	1	-3	7	
II`	0	-2	-4	-4	
III``	0	0	0	0	

Reduziertes Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten.

$x_3 = t$

$-2x_2 - 4t = -4 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 2 - 2t$

$-5x_1 + x_2 - 3t = 7$

$-5x_1 + 2 - 2t - 3t = 7 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -1 - t$

$\mathbb{L} = \{-1 - t; 2 - 2t; t\}$

Die drei Ausgangsgleichungen des LGS stellen drei Ebenen im Raum dar, die sich in der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneiden.

Lösung A7

Lösungslogik

a) $E \parallel g$ wenn $\overrightarrow{rv_g} \perp \cdot \overrightarrow{n_E}$ (Orthogonalitätsbedingung).

b) Es ist die Normalenform der Ebene gegeben. Da $E \parallel g$, kann die Abstandsgleichung Punkt-Ebene verwendet werden, diese lautet:
$d = (\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_0}) \circ \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ mit $\overrightarrow{p_1}$ als Stützvektor der Geraden.

Klausuraufschrieb

a) $\overrightarrow{\boldsymbol{n_E}} \circ \overrightarrow{\boldsymbol{rv_g}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 - 4 - 4 = 0$ und damit $E \parallel g$.

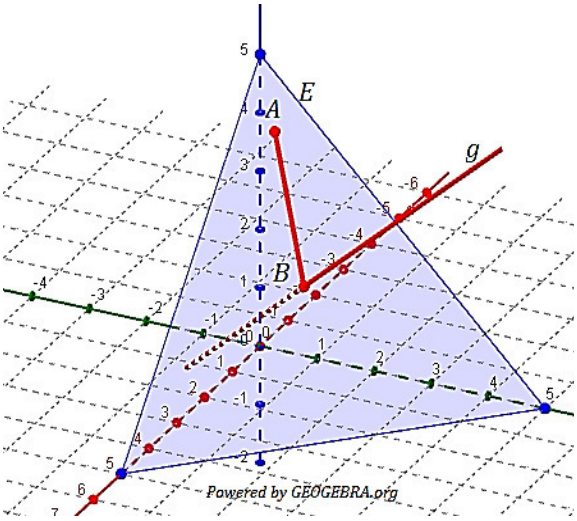
b) $d = (\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_0}) \circ \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ mit $\overrightarrow{p_1}$ als Stützvektor der Geraden.

$$d = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \circ \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{64+1+16}} = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{81}} = \frac{64+1+16}{9} = \frac{81}{9} = 9$$

Lösung A8

Klausuraufschrieb

Der gesuchte Punkt ist der Fußpunkt des Lotes von A auf g.

1) Man stellt eine Gleichung der Hilfsebene E auf, die orthogonal zu g ist und durch A verläuft. Dabei wird der Normalenvektor von E als Richtungsvektor von g verwendet.

2) Man schneidet die Gerade g mit der Ebene E und bestimmt damit die Koordinaten des Punktes B.