

Pflichtteilaufgaben

Abituraufgaben allg. bildendes Gymnasium Pflichtteil 2012 BW

Aufgabe A1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (\sin(x) + 7)^5$.



Aufgabe A2

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = 2e^{4x} + \frac{3}{x^2}$.

Aufgabe A3

Lösen Sie für $0 \leq x \leq 2\pi$ die Gleichung $\sin(x) \cdot \cos(x) - 2\cos(x) = 0$.

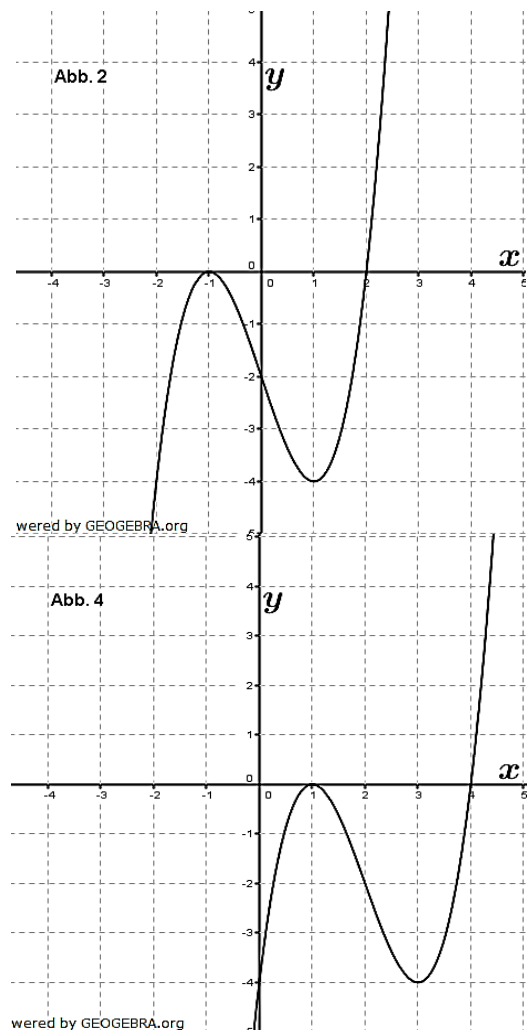
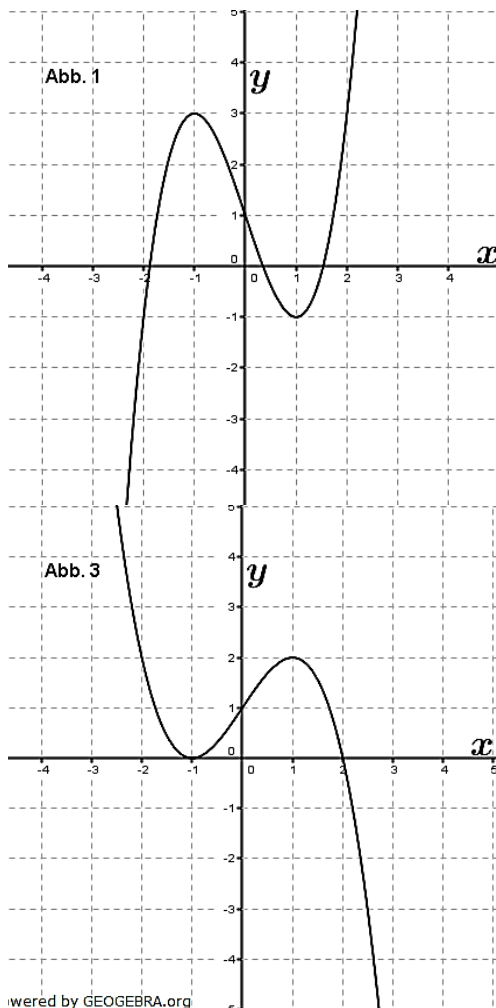
Aufgabe A4

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{2}{x}$ und $g(x) = 2x - 3$.

Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der beiden zugehörigen Graphen. Untersuchen Sie, ob sich die beiden Graphen senkrecht schneiden.

Aufgabe A5

Eine der folgenden Abbildungen zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x - 2$.



Pflichtteilaufgaben

Abituraufgaben allg. bildendes Gymnasium Pflichtteil 2012 BW

- a) Begründen Sie, dass die Abbildung 2 den Graphen von f zeigt.
b) Von den anderen drei Abbildungen gehört eine zur Funktion g mit $g(x) = f(x - a)$ und eine zur Funktion h mit $h(x) = b \cdot f(x)$. Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die zugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung. Geben Sie die Werte für a und b an.

Aufgabe A6

Gegeben sind die Ebene

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

und

$$F: x_2 + 2x_3 = 8.$$

Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden.

Aufgabe A7

Gegeben sind der Punkt $A(1|1|3)$ und die Ebene $E: x_1 - x_3 - 4 = 0$.

- a) Welche besondere Lage hat E im Koordinatensystem?
b) Der Punkt A wird an der Ebene E gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunktes.

Aufgabe A8

Gegeben sind eine Ebene E und eine Gerade g , die in E liegt. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung einer Geraden h ermitteln kann, die orthogonal zu g ist und ebenfalls in E liegt.

Lösung A1

$$f(x) = (\sin(x) + 7)^5$$

Kettenregel erforderlich

$$f'(u \circ v) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$u = \sin(x) + 7 \quad u' = \cos(x)$$

$$v(u(x)) = u^5 \quad v'(u(x)) = 5u^4$$

$$f'(x) = 5u^4 \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = 5 \cdot (\sin(x) + 7)^4 \cdot \cos(x)$$

Lösung A2

$$f(x) = 2e^{4x} + \frac{3}{x^2}$$

Summen-, Potenzregel, lineare Substitution

$$F(x) = \int \left(2e^{4x} + \frac{3}{x^2} \right) dx = 2 \cdot \int e^{4x} dx + 3 \cdot \int x^{-2} dx = \frac{2}{4} e^{4x} + \frac{3}{(-1)} \cdot x^{-1} + c$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{4x} - \frac{3}{x} + c$$

Lösung A3

$$\sin(x) \cdot \cos(x) - 2 \cdot \cos(x) = 0 \quad \text{Faktorisieren, Satz vom Nullprodukt}$$

$$\cos(x) \cdot (\sin(x) - 2) = 0$$

Faktorisieren $\cos(x)$

$$\cos(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{3}{2}\pi$$

Satz vom Nullprodukt

$$\sin(x) - 2 = 0 \Rightarrow \sin(x) = 2$$

keine Lösung, da $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right\}$$

Lösung A4

Lösungslogik:

Gemeinsame Punkte durch Berechnung der Schnittpunkte.

Berechnung der Steigungen von f und g in den Schnittpunkten.

Bestimmung der eventuellen Orthogonalität über die Orthogonalitätsbedingung

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Klausuraufschrieb:

$$f(x) \cap g(x)$$

$$\frac{2}{x} = 2x - 3$$

| $\cdot x$ (Beseitigung des Nenners)

$$2 = 2x^2 - 3x$$

| $: 2$

$$x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

| quadratische Gleichung

$$x_{1,2} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$$

| p/q -Formel

$$x_1 = 2; x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$g(x_1) = 2 \cdot 2 - 3 = 1; \quad g(x_2) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - 3 \right) = -4$$

$$S_1(2|1); S_2\left(-\frac{1}{2}|-4\right)$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}; \quad g'(x) = 2$$

$$f'(2) = -\frac{1}{2}; \quad g'(2) = 2 \Rightarrow f'(2) \cdot g'(2) = -1 \Rightarrow \text{Graphen schneiden sich } \perp$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -8; \quad g'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -16$$

Lösung A5

a) In Abbildung 2 ist $f(0) = -2$. Keine der anderen Schaubilder hat den Schnittpunkt $S_y(0 | -2)$.

b) $g(x) = f(x - a)$ stellt eine Verschiebung von $f(x)$ um a Stellen nach rechts dar. Abbildung 4 ist die Verschiebung von $f(x)$ um 2 Stellen nach rechts mit $a = 2$.

$h(x) = b \cdot f(x)$ stellt eine Streckung von $f(x)$ in y -Richtung dar. Da Abbildung 1 lediglich eine Verschiebung von $f(x)$ um 3 Stellen nach oben ist, ist Abbildung 3 das Schaubild der Funktion h . Wegen des Verlaufs des Schaubildes von h aus dem II. Quadranten in den IV. Quadranten ist $b < 0$. Weiterhin gilt: $h(0) = b \cdot f(0) = 1$.

$$b \cdot (-2) = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

c) $k(x) = f(x) + 3$

Lösung A6

Lösungslogik

Wir stellen die gegebene Normalengleichung von E in die Koordinatengleichung um und bilden $E \cap F$. Im Gleichungssystem mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen wählen wir einen Parameter frei, um zur Parametergleichung der Schnittgeraden zu gelangen.

Klausuraufschrieb

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E: 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$$E \cap F$$

$$\text{I)} \quad 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$$\text{II)} \quad x_2 + 2x_3 = 8$$

$$x_2 = t.$$

$$\text{II)} \quad t + 2x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 4 - \frac{1}{2}t$$

$$\text{I)} \quad 4x_1 - t + 2(4 - \frac{1}{2}t) = 4$$

$$4x_1 - t + 8 - t = 4$$

$$4x_1 = -4 + 2t \Rightarrow x_1 = -1 + \frac{1}{2}t$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2}t \\ t \\ 4 - \frac{1}{2}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung A7

Lösungslogik

- Die besondere Lage von E ergibt sich aus der fehlenden x_2 -Koordinate der Ebenengleichung.
- Wir stellen die Parametergleichung der Lotgeraden g durch A auf und ermitteln den Schnittpunkt S dieser Geraden mit E . Der Bildpunkt A' ergibt sich dann aus $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS}$.

Klausuraufschrieb

- Der Ebene fehlt die x_2 -Koordinate, d.h., für alle $x_2 \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $x_1 - x_3 - 4 = 0$ erfüllt. Die Ebene läuft parallel zur x_2 -Achse.
- Lotgerade von Punkt $A(1|1|3)$ auf die Ebene hat die Gleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E \cap g$$

$$\text{Aus } g \text{ folgt: } x_1 = 1 + t; \quad x_3 = 3 - t$$

Eingesetzt in E :

$$1 + t - (3 - t) - 4 = 0 \Rightarrow t = 3$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-1 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Bildpunkt hat die Koordinaten $A' = (7|1|-3)$

Lösung A8

Damit h orthogonal zu g ist, müssen die beiden Richtungsvektoren der Geraden aufeinander senkrecht stehen. Sei $\vec{u}$ der Richtungsvektor von g und $\vec{v}$ der Richtungsvektor von h so gilt: $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$.

Gleichzeitig muss bezüglich des Normalenvektors $\vec{n}$ von E gelten: $\vec{n} \circ \vec{v} = 0$.

Ein Lösungsvektor dieses Gleichungssystems wird als Richtungsvektor von h gewählt. Als Stützvektor von h verwendet man am einfachsten den Stützvektor von g , da g in E liegt.