Lösung A1

$f(x) = (sin(x) + 7)^5$ Kettenregel erforderlich

$f'(u \circ v) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$
$u = sin(x) + 7 \qquad u' = cos(x)$
$v(u(x)) = u^5 \qquad v'(u(x)) = 5u^4$
$f'(x) = 5u^4 \cdot cos(x)$
$f'(x) = 5 \cdot (sin(x) + 7)^4 \cdot cos(x)$

Lösung A2

$f(x) = 2e^{4x} + \frac{3}{x^2}$ Summen-, Potenzregel, lineare Substitution

---

$F(x) = \int \left(2e^{4x} + \frac{3}{x^2}\right) dx = 2 \cdot \int e^{4x} dx + 3 \cdot \int x^{-2} dx = \frac{2}{4} e^{4x} + \frac{3}{(-1)} \cdot x^{-1} + c$
$F(x) = \frac{1}{2} e^{4x} - \frac{3}{x} + c$

Lösung A3

$sin(x) \cdot cos(x) - 2 \cdot cos(x) = 0$ Faktorisieren, Satz vom Nullprodukt

---

$cos(x) \cdot (sin(x) - 2) = 0$	|	Faktorisieren $cos(x)$
$cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{2};\ x_2 = \frac{3}{2}\pi$	|	Satz vom Nullprodukt
$sin(x) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad sin(x) = 2$	|	keine Lösung, da $-1 \leq sin(x) \leq 1$

$\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\}$

Lösung A4

Lösungslogik:
Gemeinsame Punkte durch Berechnung der Schnittpunkte.
Berechnung der Steigungen von f und g in den Schnittpunkten.
Bestimmung der eventuellen Orthogonalität über die Orthogonalitätsbedingung $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Klausuraufschrieb:

$f(x) \cap g(x)$

$\frac{2}{x} = 2x - 3$	|	$\cdot x$ (Beseitigung des Nenners)
$2 = 2x^2 - 3x$	|	$:2$
$x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$	|	quadratische Gleichung
$x_{1,2} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$	|	p/q-Formel

$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2}$

$g(x_1) = 2 \cdot 2 - 3 = 1; \quad g(x_2) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - 3\right) = -4$

$S_1(2|1);\ S_2\left(-\frac{1}{2}\middle|-4\right)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$; $g'(x) = 2$

$f'(2) = -\frac{1}{2}$; $g'(2) = 2 \Rightarrow f'(2) \cdot g'(2) = -1 \Rightarrow$ Graphen schneiden sich $\perp$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -8$; $g'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -16$

Lösung A5

a) In Abbildung 2 ist $f(0) = -2$. Keine der anderen Schaubilder hat den Schnittpunkt $S_y(0|-2)$.

b) $g(x) = f(x-a)$ stellt eine Verschiebung von $f(x)$ um a Stellen nach rechts dar. Abbildung 4 ist die Verschiebung von $f(x)$ um 2 Stellen nach rechts mit $a = 2$.
$h(x) = b \cdot f(x)$ stellt eine Streckung von $f(x)$ in y–Richtung dar. Da Abbildung 1 lediglich eine Verschiebung von $f(x)$ um 3 Stellen nach oben ist, ist Abbildung 3 das Schaubild der Funktion h. Wegen des Verlaufs des Schaubildes von h aus dem II. Quadranten in den IV. Quadranten ist $b < 0$. Weiterhin gilt: $h(0) = b \cdot f(0) = 1$.
$b \cdot (-2) = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

c) $k(x) = f(x) + 3$

Lösung A6

Lösungslogik

Wir stellen die gegebene Normalengleichung von E in die Koordinatengleichung um und bilden $E \cap F$. Im Gleichungssystem mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen wählen wir einen Parameter frei, um zur Parametergleichung der Schnittgeraden zu gelangen.

Klausuraufschrieb

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E: 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$E \cap F$

I) $4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$

II) $x_2 + 2x_3 = 8$

$x_2 = t$.

II) $t + 2x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 4 - \frac{1}{2}t$

I) $4x_1 - t + 2(4 - 1/2t) = 4$

$4x_1 - t + 8 - t = 4$

$4x_1 = -4 + 2t \Rightarrow x_1 = -1 + \frac{1}{2}t$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1+\frac{1}{2}t\\t\\4-\frac{1}{2}t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A7

Lösungslogik

a) Die besondere Lage von E ergibt sich aus der fehlenden x_2–Koordinate der Ebenengleichung.

b) Wir stellen die Parametergleichung der Lotgeraden g durch A auf und ermitteln den Schnittpunkt S dieser Geraden mit E. Der Bildpunkt A' ergibt sich dann aus $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS}$.

Klausuraufschrieb

a) Der Ebene fehlt die x_2–Koordinate, d.h., für alle $x_2 \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $x_1 - x_3 - 4 = 0$ erfüllt. Die Ebene läuft parallel zur x_2–Achse.

b) Lotgerade von Punkt $A(1|1|3)$ auf die Ebene hat die Gleichung:

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$E \cap g$

Aus g folgt: $x_1 = 1 + t;\ \ x_3 = 3 - t$

Eingesetzt in E:

$1 + t - (3 - t) - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 3$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-1 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Bildpunkt hat die Koordinaten $A' = (7|1|-3)$

Lösung A8

Damit h orthogonal zu g ist, müssen die beiden Richtungsvektoren der Geraden aufeinander senkrecht stehen. Sei $\vec{u}$ der Richtungsvektor von g und $\vec{v}$ der Richtungsvektor von h so gilt: $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$.

Gleichzeitig muss bezüglich des Normalenvektors $\vec{n}$ von E gelten: $\vec{n} \circ \vec{v} = 0$.

Ein Lösungsvektor dieses Gleichungssystems wird als Richtungsvektor von h gewählt. Als Stützvektor von h verwendet man am einfachsten den Stützvektor von g, da g in E liegt.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de