



Aufgabe A1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4\sin(2x)$. Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(\pi) = 7$.

Aufgabe A3

Lösen Sie die Gleichung $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$.

Aufgabe A4

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe A5

Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

- (1) $f(2) = 1$
- (2) $f'(2) = 0$
- (3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$
- (4) Für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ gilt: $f(x) \rightarrow 5$

Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat.

Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen.

Aufgabe A6

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1|-1|3)$ und $B(2|-3|0)$.

Die Ebene E wird von g orthogonal geschnitten und enthält den Punkt $C(4|3|-8)$.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E .

Untersuchen Sie, ob S zwischen A und B liegt.

Aufgabe A7

Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E_1: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \quad \text{und} \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie, dass die beiden Ebenen parallel zueinander sind.

Die Ebene E_3 ist parallel E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen denselben Abstand.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_3 .

Aufgabe A8

Neun Spielkarten (vier Ass, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch.

- a) Peter dreht zufällig zwei gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
- A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.
 - B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch.
- b) Die neun Karten werden gemischt und erneut verdeckt ausgelegt. Laura dreht nun so lange Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen, bis ein Ass erscheint. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an. Welche Werte kann X annehmen? Berechnen Sie $P(X \leq 2)$.

Aufgabe A9

Gibt es eine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph drei Wendepunkte besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung A1

$$f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x} \quad \text{Produktregel erforderlich}$$

$$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$$

$$u = 2x^2 + 5 \quad u' = 4x$$

$$v = e^{-2x} \quad v' = -2e^{-2x}$$

$$f'(x) = 4x \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot (2x^2 + 5)$$

$$f'(x) = 2e^{-2x} \cdot (2x - 2x^2 - 5)$$

Lösung A2

$$f(x) = 4\sin(2x) \quad \text{lineare Substitution}$$

$$F(x) = \int 4\sin(2x)dx = -\frac{4\cos(2x)}{2} + c = -2\cos(2x) + c$$

$$F(\pi) = 7 = -2\cos(2\pi) + c$$

$$c = 7 + 2\cos(2\pi) = 7 + 2 = 9$$

$$F(x) = -2\cos(2x) + 9$$

Lösung A3

$$2e^x - \frac{4}{e^x} = 0 \quad \text{Multiplikation, Logarithmieren}$$

$$2e^x - \frac{4}{e^x} = 0 \quad | \cdot e^x$$

$$2e^{2x} - 4 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 2 \quad | \ln$$

$$2x = \ln(2) \Rightarrow x = \frac{\ln(2)}{2}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2} \ln(2) \right\}$$

Lösung A4

Lösungslogik:

Berechnung der Schnittpunkte für untere und obere Integralgrenze.

Berechnung der Fläche über das Integral aus oberer Kurve minus unterer Kurve.

Klausuraufschrieb:

$$f(x) \cap g(x)$$

$$-x^2 + 3 = 2x$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad | \quad \text{quadratische Gleichung}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2 \quad | \quad p/q\text{-Formel}$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -3$$

$$A = \left| \int_{-3}^1 (f(x) - g(x)) dx \right| = \left| \int_{-3}^1 (-x^2 + 3 - 2x) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 3x - x^2 \right]_{-3}^1 \right|$$

$$A = \left| \left(-\frac{1}{3} + 3 - 1 - (9 - 9 - 9) \right) \right| = \left| -\frac{1}{3} + 2 + 9 \right| = \left| \frac{32}{3} \right|$$

$$A = \frac{32}{3} \text{ FE}$$

Abituraufgaben allg. bildendes Gymnasium Pflichtteil 2013 BW

Lösung A5

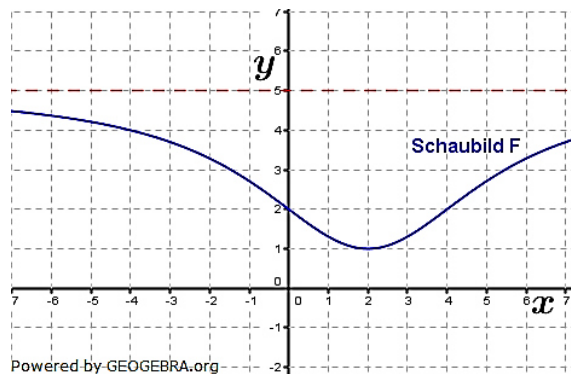
- (1) $f(2) = 1$
Die Funktion hat an der Stelle $x = 2$ den Funktionswert 1.
- (2) $f'(2) = 0$
Die Funktion hat an der Stelle $x = 2$ eine waagrechte Tangente.
- (3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$
Die Funktion hat an der Stelle $x = 4$ einen Wendepunkt.
- (4) Für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$ gilt: $f(x) \rightarrow 5$
Die Funktion hat für $x \rightarrow |\infty|$ die waagrechte Asymptote $y = 5$.
Hinweis zu (2):

Sie können nur die Angabe einer waagrechten Tangente machen, keinesfalls die Aussage über einen Extrempunkt treffen, da in der Aufgabenstellung keine Aussage über die hinreichende Bedingung $f''(2) \neq 0$ gemacht ist.

Möglicher Verlauf des Graphen:

Hinweis:

Dies ist nur ein möglicher Verlauf. Es g



Lösung A6

Lösungslogik

Wir stellen die Parametergleichung der Geraden g durch die Punkte A und B auf sowie die Koordinatengleichung der Ebene E . Mit $g \cap E$ ermitteln wir den Schnittpunkt S der Geraden mit der Ebene.

Mithilfe des ermittelten Schnittpunktes S berechnen wir die Skalierung r der Geradengleichung. Ist $0 < r < 1$ liegt S zwischen A und B . In allen anderen Fällen nicht.

Klausuraufschrieb

$$g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB}; r \in \mathbb{R}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$g \cap E$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-3 + r + 8 + 4r - 33 + 9r = 0$$

$$14r = 28$$

$$r = 2$$

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(3|-5|-3)$.

Prüfung, ob S zwischen A und B über eine Punktprobe.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad 1 + r = 3 \quad \Rightarrow \quad r = 2$$

$$(2) \quad -1 - 2 \cdot r = -5 \quad \Rightarrow \quad r = 2$$

$$(3) \quad 3 - 3 \cdot r = -3 \quad \Rightarrow \quad r = 2$$

Wegen $r > 1$ liegt der Punkt S nicht zwischen A und B .

Lösung A7

Lösungslogik

Berechnung des Normalenvektors von E_2 über das Kreuzprodukt aus den beiden Richtungsvektoren, der Vergleich der beiden Normalenvektoren zeigt Parallelität der beiden Ebenen.

Parallele Ebene E_3 in der Mitte von E_1 und E_2 :

Wir wählen einen beliebigen Punkt P auf E_1 und den Aufpunkt von E_2 . Der Mittelpunkt dieser Strecke ist ein Punkt der Ebene E_3 . Da die parallele Ebene denselben Richtungsvektor haben muss, lässt sich hieraus d_3 der Koordinatengleichung von E_3 bestimmen.

Klausuraufschrieb

$$E_1: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad d_{E_1} = 1$$

Normalenvektor E_2 :

$$k \cdot \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = d_2$$

$$E_2: 2 \cdot 7 - 2 \cdot 7_2 + 5 = d_{E_2} \quad \Rightarrow \quad d_{E_2} = 5 \quad | \quad \text{Punktprobe mit Aufpunkt } E_2$$

Wegen $\vec{n}_{E_1} = \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $d_{E_1} \neq d_{E_2}$ sind die beiden Ebenen echt parallel.

Mittelebene E_3 :

Beliebiger Punkt P auf E_1 ist z.B. $P(0|0|-1)$. Aufpunkt von E_2 ist $Q(7|7|5)$.

Der Mittelpunkt M der Strecke \overline{PQ} liegt auf E_3 .

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OQ}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 3,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_3: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = d_3$$

$$E_3: 2 \cdot 3,5 - 2 \cdot 3,5 + 2 = d_3 \quad | \quad \text{Punktprobe mit Punkt } M$$

$$E_3: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$

Lösung A8

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.

a) $P(\text{Ass}) = \frac{4}{9}$ im ersten Zug bzw. $\frac{3}{8}$ im zweiten Zug.

$$P(\overline{\text{Ass}}) = \frac{5}{9} \text{ im ersten Zug bzw. } \frac{4}{8} \text{ im zweiten Zug.}$$

$$P(A) = P(\overline{\text{Ass}}; \overline{\text{Ass}}) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ass aufgedeckt ist beträgt etwa 27,8 %.

$$P(\text{Ass}) = \frac{4}{9} \text{ im ersten Zug bzw. } \frac{4}{8} \text{ im zweiten Zug.}$$

$$P(\text{Dame}) = \frac{2}{9} \text{ im ersten Zug bzw. } \frac{2}{8} \text{ im zweiten Zug.}$$

$$P(B) = P\{(\text{Ass}, \text{Dame}), (\text{Dame}, \text{Ass})\} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Dame und ein Ass aufgedeckt sind beträgt etwa 22,2 %.

b) Spätestens im sechsten Zug wird ein Ass aufgedeckt. Somit gilt für X :

$$1 \leq X \leq 6$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$$

Hinweis: $P(X = 0)$ kann nicht vorkommen, denn dann wäre ja kein Ass im Kartenstapel.

$$P(X = 1) = \frac{4}{9}$$

$$P(X = 2) = P(\overline{\text{Ass}}, \text{Ass}) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

$$P(X \leq 2) = \frac{4}{9} + \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

Lösung A9

Wendestellen einer Funktion sind Nullstellen ihrer zweiten Ableitung. Da die zweite Ableitung einer ganzrationalen Funktion vierten Grades eine quadratische Funktion mit höchstens zwei Nullstellen ist, kann der Graph der Ausgangsfunktion höchstens zwei Wendepunkte haben.