Lösung A1

$f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$ Produktregel erforderlich

$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$
$u = 2x^2 + 5 \qquad u' = 4x$
$v = e^{-2x} \qquad v' = -2e^{-2x}$
$f'(x) = 4x \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot (2x^2 + 5)$
$f'(x) = 2e^{-2x} \cdot (2x - 2x^2 - 5)$

Lösung A2

$f(x) = 4sin(2x)$ lineare Substitution

$F(x) = \int 4sin(2x)dx = -\frac{4cos(2x)}{2} + c = -2cos(2x) + c$
$F(\pi) = 7 = -2cos(2\pi) + c$
$c = 7 + 2cos(2\pi) = 7 + 2 = 9$
$F(x) = -2cos(2x) + 9$

Lösung A3

$2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$ Multiplikation, Logarithmieren

$2e^x - \frac{4}{e^x} = 0 \qquad | \quad \cdot e^x$
$2e^{2x} - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{2x} = 2 \qquad | \quad ln$
$2x = ln(2) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{ln(2)}{2}$
$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2} ln(2)\right\}$

Lösung A4

Lösungslogik:
Berechnung der Schnittpunkte für untere und obere Integralgrenze.
Berechnung der Fläche über das Integral aus oberer Kurve minus unterer Kurve.

Klausuraufschrieb:
$f(x) \cap g(x)$
$-x^2 + 3 = 2x$
$x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad |$ quadratische Gleichung
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 3} = -1 \pm 2 \qquad |$ p/q-Formel
$x_1 = 1; \;\; x_2 = -3$

$$A = \left| \int_{-3}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)dx \right| = \left| \int_{-3}^{1} (-x^2 + 3 - 2x)dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 3x - x^2 \right]_{-3}^{1} \right|$$

$$A = \left| \left(-\frac{1}{3} + 3 - 1 - (9 - 9 - 9)\right| = \left| -\frac{1}{3} + 2 + 9 \right| = \left| \frac{32}{3} \right|$$

$$A = \frac{32}{3}\ FE$$

Lösung A5

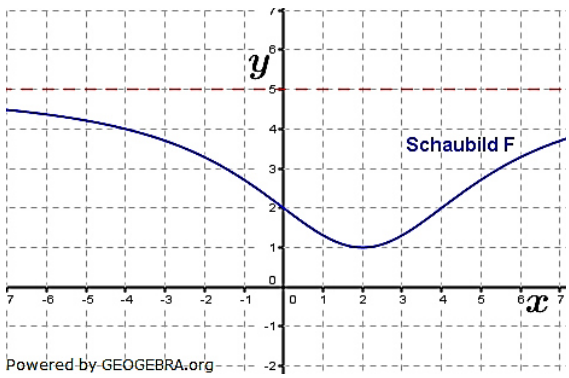
(1) $f(2) = 1$
Die Funktion hat an der Stelle $x = 2$ den Funktionswert 1.

(2) $f'(2) = 0$
Die Funktion hat an der Stelle $x = 2$ eine waagrechte Tangente.

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$
Die Funktion hat an der Stelle $x = 4$ einen Wendepunkt.

(4) Für $x \longrightarrow +\infty$ und $x \longrightarrow -\infty$ gilt: $f(x) \longrightarrow 5$
Die Funktion hat für $x \longrightarrow |\infty|$ die waagrechte Asymptote $y = 5$.

Hinweis zu (2):
Sie können nur die Angabe einer waagrechten Tangente machen, keinesfalls die Aussage über einen Extrempunkt treffen, da in der Aufgabenstellung keine Aussage über die hinreichende Bedingung $f''(2) \neq 0$ gemacht ist.
Möglicher Verlauf des Graphen:
Hinweis:
Dies ist nur ein möglicher Verlauf. Es g



Lösung A6

Lösungslogik

Wir stellen die Parametergleichung der Geraden g durch die Punkte A und B auf sowie die Koordinatengleichung der Ebene E. Mit $g \cap E$ ermitteln wir den Schnittpunkt S der Geraden mit der Ebene.
Mithilfe des ermittelten Schnittpunktes S berechnen wir die Skalierung r der Geradengleichung. Ist $0 < r < 1$ liegt S zwischen A und B. In allen anderen Fällen nicht.

Klausuraufschrieb

$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}; r \in \mathbb{R}$

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

$$E\colon\ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$g \cap E$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$-3 + r + 8 + 4r - 33 + 9r = 0$

$14r = 28$

$r = 2$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(3|-5|-3)$.
Prüfung, ob S zwischen A und B über eine Punktprobe.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(1) $1 + r = 3 \quad \Rightarrow \quad r = 2$
(2) $-1 - 2 \cdot r = -5 \quad \Rightarrow \quad r = 2$
(3) $3 - 3 \cdot r = -3 \quad \Rightarrow \quad r = 2$

Wegen $r > 1$ liegt der Punkt S nicht zwischen A und B.

Lösung A7

Lösungslogik

Berechnung des Normalenvektors von E_2 über das Kreuzprodukt aus den beiden Richtungsvektoren, der Vergleich der beiden Normalenvektoren zeigt Parallelität der beiden Ebenen.
Parallele Ebene E_3 in der Mitte von E_1 und E_2:
Wir wählen einen beliebigen Punkt P auf E_1 und den Aufpunkt von E_2. Der Mittelpunkt dieser Strecke ist ein Punkt der Ebene E_3. Da die parallele Ebene denselben Richtungsvektor haben muss, lässt sich hieraus d_3 der Koordinatengleichung von E_3 bestimmen.

Klausuraufschrieb

$E_1\!: \; 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad d_{E_1} = 1$

Normalenvektor E_2:

$$k \cdot \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E_2\!: \; 2x_1 - 2x_2 + x_3 = d_2$
$E_2\!: \; 2 \cdot 7 - 2 \cdot 7_2 + 5 = d_{E_2} \;\Rightarrow\; d_{E_2} = 5$ | Punktprobe mit Aufpunkt E_2

Wegen $\overrightarrow{n_{E_1}} = \overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $d_{E_1} \neq d_{E_2}$ sind die beiden Ebenen echt parallel.

Mittelebene E_3:
Beliebiger Punkt P auf E_1 ist z.B. $P(0|0|-1)$. Aufpunkt von E_2 ist $Q(7|7|5)$.
Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ liegt auf E_3.

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$E_3\!: \; 2x_1 - 2x_2 + x_3 = d_3$
$E_3\!: \; 2 \cdot 3{,}5 - 2 \cdot 3{,}5 + 2 = 2$ | Punktprobe mit Punkt M
$E_3\!: \; 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$

Lösung A8

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.

a) $P(Ass) = \frac{4}{9}$ im ersten Zug bzw. $\frac{3}{8}$ im zweiten Zug.

$P(\overline{Ass}) = \frac{5}{9}$ im ersten Zug bzw. $\frac{4}{8}$ im zweiten Zug.

$P(A) = P(\overline{Ass}; \overline{Ass}) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ass aufgedeckt ist beträgt etwa $27{,}8\,\%$.

$P(Ass) = \frac{4}{9}$ im ersten Zug bzw. $\frac{4}{8}$ im zweiten Zug.

$P(Dame) = \frac{2}{9}$ im ersten Zug bzw. $\frac{2}{8}$ im zweiten Zug.

$P(B) = P\{(Ass, Dame), (Dame, Ass)\} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Dame und ein Ass aufgedeckt sind beträgt etwa $22{,}2\,\%$.

b) Spätestens im sechsten Zug wird ein Ass aufgedeckt. Somit gilt für X:

$1 \leq X \leq 6$

$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$

Hinweis: $P(X = 0)$ kann nicht vorkommen, denn dann wäre ja kein Ass im Kartenstapel.

$P(X = 1) = \frac{4}{9}$

$P(X = 2) = P(\overline{Ass}, Ass) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$

$P(X \leq 2) = \frac{4}{9} + \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$

Lösung A9

Wendestellen einer Funktion sind Nullstellen ihrer zweiten Ableitung. Da die zweite Ableitung einer ganzrationalen Funktion vierten Grades eine quadratische Funktion mit höchstens zwei Nullstellen ist, kann der Graph der Ausgangsfunktion höchstens zwei Wendepunkte haben.