Pflichtteilaufgaben

Abituraufgaben allg. bildendes Gymnasium Pflichtteil 2014 BW

Aufgabe A1
Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{2x}$.

Aufgabe A2
Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3}dx$.

Aufgabe A3
Lösen Sie die Gleichung $x^4 = 4 + 3x^2$.

Aufgabe A4
Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = cos(x)$ und $g(x) = 2cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1$.

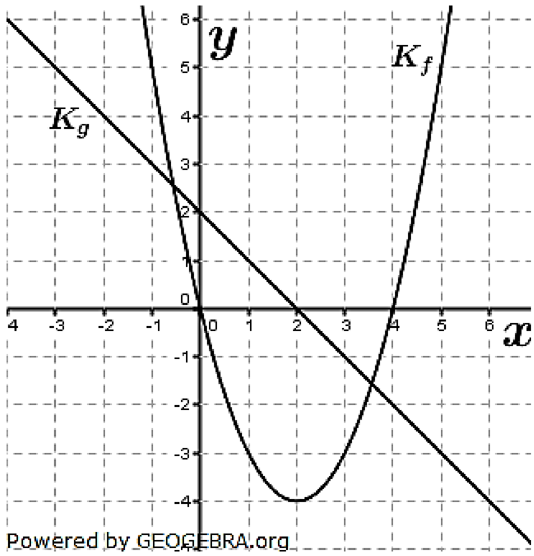
a) Beschreiben Sie, wie man den Graphen von g aus dem Graphen von f erhält.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen von g für $0 \leq x \leq 4$.

Aufgabe A5
Die Abbildung zeigt die Graphen K_f und K_g zweier Funktionen f und g.

a) Bestimmen Sie $f\big(g(3)\big)$.
Bestimmen Sie einen Wert für x so, dass $f\big(g(x)\big) = 0$ ist.

b) Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.
Bestimmen Sie $h'(2)$.



Aufgabe A6
Gegeben sind die Ebenen $E: x_1 + x_2 = 4$ und $F:\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$.

a) Stellen Sie die Ebenen E und F in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.
Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E und F an.

b) Die Ebene G ist parallel zur x_1-Achse und schneidet die x_2x_3-Ebene in derselben Spurgeraden wie die Ebene F.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene G an.

Aufgabe A7
Gegeben sind die Punkte $A(1|10|1)$, $B(-3|13|1)$ und $C(2|3|1)$.
Die Gerade g verläuft durch A und B.
Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden g.

Aufgabe A8
An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich $\frac{2}{3}$ aller Spiele.

a) Formulieren Sie ein Ereignis A für das gilt:
$P(A) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$.

b) Jemand spielt vier Spiele an dem Automaten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er dabei genau zweimal.

Aufgabe A9
Gegeben sind der Mittelpunkt einer Kugel sowie eine Ebene.
Die Kugel berührt diese Ebene.
Beschreiben Sie, wie man den Kugelradius und den Berührpunkt bestimmen kann.

Lösung A1

$f(x) = \sqrt{x}e^{2x}$ Produktregel erforderlich

$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$

$u = \sqrt{x} \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v = e^{2x} \qquad v' = 2e^{2x}$

$f'(x) = \dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{x}} + 2e^{2x} \cdot \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{e^{2x}(1+4x)}{2\sqrt{x}}$

Lösung A2

$\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3} dx$ Potenzregel mit linearer Substitution

---

$\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3} dx = 4\int_0^1 (2x+1)^{-3}\, dx = 4\left[\frac{(2x+1)^{-2}}{-2\cdot 2}\right]_0^1 = -\left[\frac{1}{(2x+1)^2}\right]_0^1$

$= -\left(\frac{1}{9} - 1\right) = \frac{8}{9}$

Lösung A3

$x^4 = 4 + 3x^2$ Substitution und quadratische Gleichung

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ | biquadratische Gleichung

Substitution:

$x^2 = z$

$z^2 - 3z - 4 = 0$ | quadratische Gleichung

$z_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$ | p/q-Formel

$z_1 = 4; \quad z_2 = -1$

Resubstitution:

$x_{1,2}^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = -2$

$x_{3,4}^2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{L} = \{\}$

$\mathbb{L} = \{-2; 2\}$

Lösung A4

Lösungslogik

a) Siehe Klausuraufschrieb.

b) Berechnung aller x für $0 \le x \le 4$ über $g(x) = 0$.

Klausuraufschrieb

a) Das Schaubild von g geht aus dem Schaubild von f hervor durch:

1. Streckung in y–Richtung mit dem Faktor $k = 2$,
2. Streckung in x–Richtung mit dem Faktor $k = \frac{2}{\pi}$,
3. Verschiebung in y–Richtung um eine Einheit nach unten.

b) $g(x) = 0$

$2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1 \qquad | \quad :2$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{1}{2}$

$arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \implies u_0 = \frac{\pi}{3};\; u_1 = 2\pi - u_0 = \frac{5}{3}\pi$

$u_0 = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}x_0 \implies x_0 = \frac{2}{3}$

$u_1 = \frac{5}{3}\pi = \frac{\pi}{2}x_1 \implies x_1 = \frac{10}{3}$

$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

Wegen $p = 4$ liegen alle weiteren Nullstellen außerhalb des Intervalls $0 \leq x \leq 4$.

$\mathbb{L} = \left\{\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right\}$

Lösung A5/14

K_f ist eine Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(2|-4)$.
K_g ist eine Gerade mit der Steigung $m = -1$ und dem y–Achsenabschnitt $c = 2$.
Hieraus ergeben sich die Funktionsgleichungen zu:
$f(x) = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x$ und $g(x) = -x + 2$

a) $g(3) = -1;\; f(-1) = 5;\; f(g(3)) = 5$

$f(g(x)) = (-x+2)^2 - 4(-x+2) = x^2 - 4$

$f(g(x)) = 0 \implies x^2 - 4 = 0$

$x_1 = 2;\; x_2 = -2$

b) $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$f'(x) = 2x - 4 \qquad f(2) = -4 \qquad f'(2) = 0$

$g'(x) = -1 \qquad g(2) = 0 \qquad g'(2) = -1$

$h'(2) = 0 + (-4) \cdot (-1) = 4$

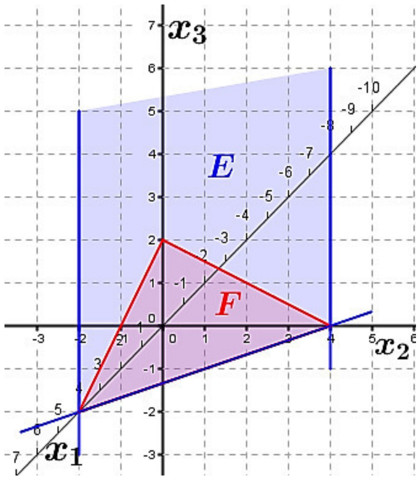
Lösung A6

Lösungslogik

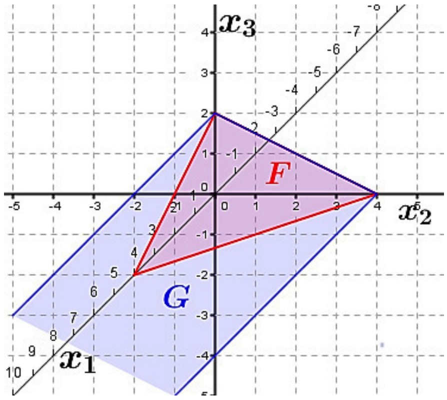
a) Wir bestimmen die Spurpunkte von E und F und zeichnen die Ebenen in das Koordinatensytem. Die Schnittgerade geht durch die gemeinsamen Punkte von E und F, wir stellen die Parametergleichung der Geraden auf.

b) Einer parallelen Ebene zur x_1–Achse fehlt die x_1–Koordinate. Sie soll laut Aufgabenstellung als Schnittgerade jedoch die Spurgerade der Ebene F enthalten. Hieraus ergeben sich die Spurpunkte von G. Mithilfe der Achsenabschnittsform der Ebene ermitteln wir dann die Koordinatengleichung von G.

Klausuraufschrieb



a) Spurpunkte von E:
$S_{x_1}(4|0|0)$; $S_{x_2}(0|4|0)$ kein S_{x_3}
Spurpunkte von F:
$S_{x_1}(4|0|0)$; $S_{x_2}(0|4|0)$; $S_{x_3}(0|0|2)$
Schnittgerade ist die Gerade durch die Punkte S_{x_1} und S_{x_2}.
$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{0S_{x_1}} + r \cdot \overrightarrow{S_{x_1}S_{x_2}}$
$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r^* \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



b) Spurpunkte von G:
$S_{x_2}(0|4|0)$; $S_{x_3}(0|0|2)$ kein S_{x_1}
Achsenabschnittsform:
$G\colon\ \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} = 1 \qquad | \cdot 4$
$G\colon\ x_2 + 2x_3 = 4$

Lösung A7

Lösungslogik

Wir berechnen den Abstand von C zur Geraden durch A und B mithilfe der Abstandsformel Punkt-Gerade mit $d = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$.

Klausuraufschrieb

$d = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+9} = 5$

$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = 25$

$d = \frac{25}{5} = 5$

Der Abstand des Punktes C von der Geraden g beträgt $5\,LE$.

Lösung A8

a) Es handelt sich um eine Bernoullikette mit $n = 10$, $p = \frac{2}{3}$ und $X \geq 8$.
A: „Bei 10 Spielen mindestens 8 Mal verlieren".

b) Binomialverteilung mit $n = 4$, $p = \frac{2}{3}$ und $X = 2$.
$B_{4;\frac{2}{3}}(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$
Er verliert mit $\frac{8}{27}$ Wahrscheinlichkeit genau zweimal.

Lösung A9

Mit der gegebenen Kugel K ist auch deren Mittelpunkt M gegeben.
Mit der gegebenen Ebene E ist auch deren Normalenvektor bekannt.
Man bildet eine Gerade g durch M mit dem Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor.
Man schneidet diese Gerade mit der Ebene und erhält damit den Berührpunkt L der Ebene mit der Kugel.
Der Radius der Kugel ist gleich dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{LM}$.