Lösung A1

$f(x) = \sqrt{x}e^{2x}$ Produktregel erforderlich

$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$
$u = \sqrt{x} \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$v = e^{2x} \qquad v' = 2e^{2x}$
$f'(x) = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x}} + 2e^{2x} \cdot \sqrt{x}$
$f'(x) = \frac{e^{2x}(1+4x)}{2\sqrt{x}}$

Lösung A2

$\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3} dx$ Potenzregel mit linearer Substitution

---

$\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3} dx = 4\int_0^1 (2x+1)^{-3}\, dx = 4\left[\frac{(2x+1)^{-2}}{-2\cdot 2}\right]_0^1 = -\left[\frac{1}{(2x+1)^2}\right]_0^1$
$= -\left(\frac{1}{9} - 1\right) = \frac{8}{9}$

Lösung A3

$x^4 = 4 + 3x^2$ Substitution und quadratische Gleichung

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ | biquadratische Gleichung
Substitution:
$x^2 = z$
$z^2 - 3z - 4 = 0$ | quadratische Gleichung
$z_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$ | p/q-Formel
$z_1 = 4; \quad z_2 = -1$
Resubstitution:
$x_{1,2}^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2$
$x_{3,4}^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{\}$
$\mathbb{L} = \{-2; 2\}$

Lösung A4

Lösungslogik
a) Siehe Klausuraufschrieb.
b) Berechnung aller x für $0 \le x \le 4$ über $g(x) = 0$.

Klausuraufschrieb
a) Das Schaubild von g geht aus dem Schaubild von f hervor durch:
1. Streckung in y–Richtung mit dem Faktor $k = 2$,
2. Streckung in x–Richtung mit dem Faktor $k = \frac{2}{\pi}$,
3. Verschiebung in y–Richtung um eine Einheit nach unten.

b) $g(x) = 0$

$2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1 \qquad | \quad :2$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{1}{2}$

$arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \implies u_0 = \frac{\pi}{3};\; u_1 = 2\pi - u_0 = \frac{5}{3}\pi$

$u_0 = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}x_0 \implies x_0 = \frac{2}{3}$

$u_1 = \frac{5}{3}\pi = \frac{\pi}{2}x_1 \implies x_1 = \frac{10}{3}$

$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

Wegen $p = 4$ liegen alle weiteren Nullstellen außerhalb des Intervalls $0 \leq x \leq 4$.

$\mathbb{L} = \left\{\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right\}$

Lösung A5/14

K_f ist eine Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(2|-4)$.
K_g ist eine Gerade mit der Steigung $m = -1$ und dem y–Achsenabschnitt $c = 2$.
Hieraus ergeben sich die Funktionsgleichungen zu:
$f(x) = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x$ und $g(x) = -x + 2$

a) $g(3) = -1;\; f(-1) = 5;\; f(g(3)) = 5$

$f(g(x)) = (-x+2)^2 - 4(-x+2) = x^2 - 4$

$f(g(x)) = 0 \implies x^2 - 4 = 0$

$x_1 = 2;\; x_2 = -2$

b) $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$f'(x) = 2x - 4 \qquad f(2) = -4 \qquad f'(2) = 0$

$g'(x) = -1 \qquad g(2) = 0 \qquad g'(2) = -1$

$h'(2) = 0 + (-4) \cdot (-1) = 4$

Lösung A6

Lösungslogik

a) Wir bestimmen die Spurpunkte von E und F und zeichnen die Ebenen in das Koordinatensytem. Die Schnittgerade geht durch die gemeinsamen Punkte von E und F, wir stellen die Parametergleichung der Geraden auf.

b) Einer parallelen Ebene zur x_1–Achse fehlt die x_1–Koordinate. Sie soll laut Aufgabenstellung als Schnittgerade jedoch die Spurgerade der Ebene F enthalten. Hieraus ergeben sich die Spurpunkte von G. Mithilfe der Achsenabschnittsform der Ebene ermitteln wir dann die Koordinatengleichung von G.

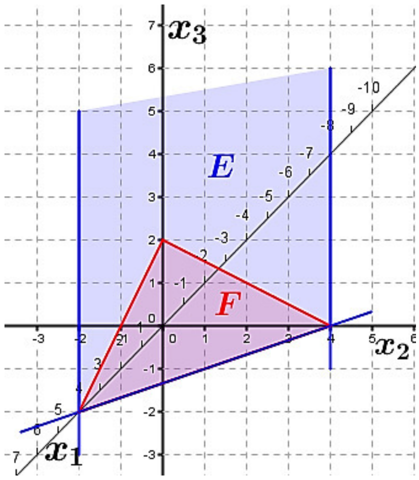
Klausuraufschrieb

a) Spurpunkte von E:
$S_{x_1}(4|0|0)$; $S_{x_2}(0|4|0)$ kein S_{x_3}
Spurpunkte von F:
$S_{x_1}(4|0|0)$; $S_{x_2}(0|4|0)$; $S_{x_3}(0|0|2)$
Schnittgerade ist die Gerade durch die Punkte S_{x_1} und S_{x_2}.

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{0S_{x_1}} + r \cdot \overrightarrow{S_{x_1}S_{x_2}}$$

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

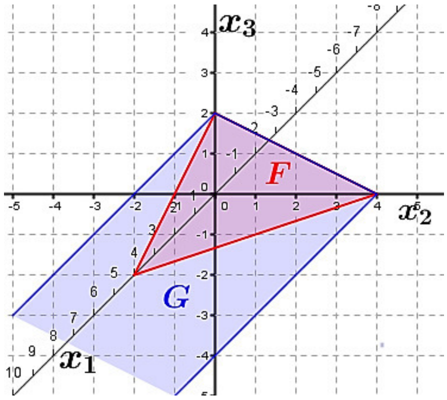
$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r^* \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



b) Spurpunkte von G:
$S_{x_2}(0|4|0)$; $S_{x_3}(0|0|2)$ kein S_{x_1}
Achsenabschnittsform:

$$G\colon\ \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} = 1 \qquad | \cdot 4$$

$$G\colon\ x_2 + 2x_3 = 4$$



Lösung A7

Lösungslogik

Wir berechnen den Abstand von C zur Geraden durch A und B mithilfe der Abstandsformel Punkt-Gerade mit $d = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$.

Klausuraufschrieb

$$d = \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix};\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix};\ |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = 25$$

$$d = \frac{25}{5} = 5$$

Der Abstand des Punktes C von der Geraden g beträgt $5\,LE$.

Lösung A8

a) Es handelt sich um eine Bernoullikette mit $n = 10$, $p = \frac{2}{3}$ und $X \geq 8$.
A: „Bei 10 Spielen mindestens 8 Mal verlieren".

b) Binomialverteilung mit $n = 4$, $p = \frac{2}{3}$ und $X = 2$.

$$B_{4;\frac{2}{3}}(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$

Er verliert mit $\frac{8}{27}$ Wahrscheinlichkeit genau zweimal.

Lösung A9

Mit der gegebenen Kugel K ist auch deren Mittelpunkt M gegeben.
Mit der gegebenen Ebene E ist auch deren Normalenvektor bekannt.
Man bildet eine Gerade g durch M mit dem Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor.
Man schneidet diese Gerade mit der Ebene und erhält damit den Berührpunkt L der Ebene mit der Kugel.
Der Radius der Kugel ist gleich dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{LM}$.