Aufgabe A1
Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (4 + e^{3x})^5$.

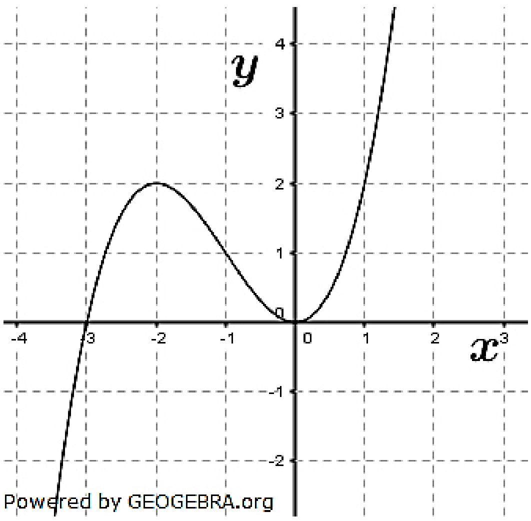
Aufgabe A2
Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi} \left(4x - sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx$.

Aufgabe A3
Lösen Sie die Gleichung $(x^3 - 3x) \cdot (e^{2x} - 5) = 0$.

Aufgabe A4
Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat im Ursprung einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 2$ die Tangente mit der Gleichung $y = 4x - 12$.
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

Aufgabe A5
Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Bergründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(1) Der Graph von f hat bei $x = -3$ einen Tiefpunkt.
(2) $f(-2) < f(-1)$
(3) $f''(-2) + f'(-2) < 1$
(4) Der Grad der Funktion f ist mindestens 4.



Aufgabe A6
Gegeben sind die drei Punkte $A(4|0|4)$, $B(0|4|4)$ und $C(6|6|2)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der das Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzt.
Veranschaulichen Sie durch eine Skizze, wie viele solche Punkte es gibt.

Aufgabe A7

Gegeben ist die Ebene E: $4x_1 + 3x_3 = 12$.

a) Stellen Sie E in einem Koordinatensystem dar.

b) Bestimmen Sie alle Punkte der x_3–Achse, die von E den Abstand 3 haben.

Aufgabe A8

Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden:

rot: $20\,\%$ $grün$: $30\,\%$ $blau$: $50\,\%$

Das Glücksrad wird n–mal gedreht.

Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.

a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	…
$P(X=k)$	$0{,}01$	$0{,}06$	$0{,}14$	$0{,}21$	$0{,}22$	$0{,}17$	$0{,}11$	$0{,}05$	…

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal Rot angezeigt wird.

c) Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von der Tabelle zugrunde liegen kann: 20, 25 oder 30.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe A9

Mit $V = \pi \cdot \int_0^4 \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2 dx$ wird der Rauminhalt eines Körpers berechnet.

Skizzieren Sie diesen Sachverhalt und beschreiben Sie den Körper.

Lösung A1

$f(x) = (4+e^{3x})^5$ Kettenregel erforderlich

$f'(u \circ v) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$

$u = 4 + e^{3x}$ $u' = 3e^{3x}$

$v(u(x)) = u^5$ $v'(u(x)) = 5u^4$

$f'(x) = 5 \cdot (4+e^{3x})^4 \cdot 3e^{3x}$

$f'(x) = 15e^{3x} \cdot (4+e^{3x})^4$

Lösung A2

$\int_0^{\pi} \left(4x - sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx$ Summenregel mit linearer Substitution

---

$$\int_0^{\pi} \left(4x - sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx = \int_0^{\pi} 4x dx - \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) dx$$

$$= \left[2x^2 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_0^{\pi} = 2\pi^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\cos(0)$$

$$= 2\pi^2 + 0 - 2 = 2(\pi^2 - 1)$$

Lösung A3

$(x^3 - 3x) \cdot (e^{2x} - 5) = 0$ Satz vom Nullprodukt

$x^3 - 3x = 0$ | 1. Faktor, Faktorisieren x

$x(x^2 - 3) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 3 \Longrightarrow\ x_2 = \sqrt{3};\ x_3 = -\sqrt{3}$

$e^{2x} - 5 = 0$ | 2. Faktor

$e^{2x} = 5$ | ln

$2x = ln(5)$ | $:2$

$x_4 = \frac{1}{2} ln(5)$

$\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}; \frac{1}{2} ln(5)\right\}$

Lösung A4

Lösungslogik

Die allgemeine Gleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades lautet:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Wegen des Hochpunktes im Ursprung ist $d = 0$, außerdem ist dieser Berührpunkt einer doppelte Nullstelle, sodass sich die Gleichung reduziert auf:

$f(x) = ax^2(x + x_3) = ax^3 + bx^2$.

Der Graph hat eine Tangente in $x = 2$. Den zugehörigen y–Wert errechnen wir über die Tangentengleichung. Mit dem errechneten Punkt machen wir eine Punktprobe mit $f(x)$. Außerdem soll gelten $f'(2) = 4$.

Wir erhalten aus den beiden Bedingungen ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, welches wir nach a und b auflösen.

<u>Klausuraufschrieb</u>
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Berührpunkt im Ursprung: $\Longrightarrow$ $d = 0$; $f(x) = ax^2(x + x_3) = ax^3 + bx^2$
Berührpunkt Tangente in $x = 2$: $\Longrightarrow$ $y = 4 \cdot 2 - 12 = -4$
Koordinaten des Tangentenpunktes $P(2|-4) \Longrightarrow$ $f(2) = -4$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$
$f(2) = 8a + 4b = -4 \Longrightarrow$ $b = -1 - 2a$
$f'(2) = 12a + 4b = 4$
$b \longrightarrow f'(1) \Longrightarrow$ $12a + 4(-1 - 2a) = 4$
$4a - 4 = 4 \Longrightarrow$ $a = 2$
$a \longrightarrow b$
$b = -1 - 2 \cdot 2 \Longrightarrow$ $b = -5$
$f(x) = 2x^3 - 5x^2$

Lösung A5

(1) *Der Graph von f hat bei $x = -3$ einen Tiefpunkt.*
Die Aussage ist wahr. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle $x = -3$ einen Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$.

(2) $f(-2) < f(-1)$
Die Aussage ist wahr. f' verläuft für $-3 < x < 0$ oberhalb der x -Achse. f ist somit in diesem Bereich monoton steigend, also ist $f(-2) < f(-1)$.

(3) $f''(-2) + f'(-2) < 1$.
Die Aussage ist falsch. Die Funktion f' hat für $x = -2$ einen Hochpunkt. Somit ist $f''(-2) = 0$. $f'(-2) = 2$ (aus Grafik abgelesen). Somit ist $f''(-2) + f'^{(-2)} = 2 > 1$.

(4) *Der Grad der Funktion f ist mindestens 4.*
Die Aussage ist wahr. Der Grad der Funktion f' ist mindestens 3. Durch die Integration von f' entsteht die Funktion f von damit mindestens dem Grad 4.

Lösung A6

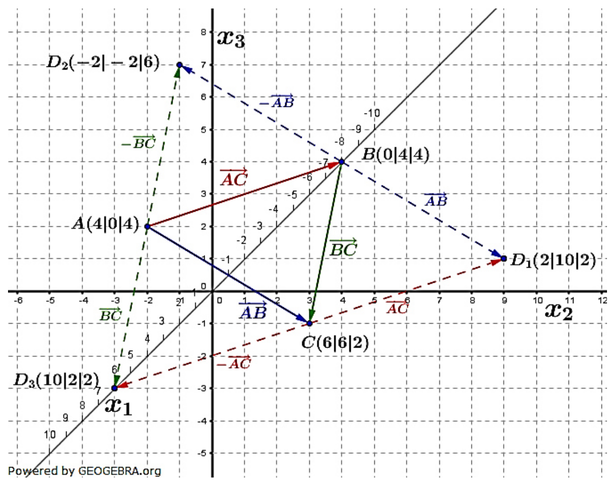
<u>Lösungslogik</u>

Wir zeichnen zunächst die Punkte und das Dreieck in ein Koordinatensystem.

a) Das Dreieck ist gleichschenklig, wenn 2 Seiten gleich lang sind und die dritte Seite eine ungleiche Länge aufweist. Somit gilt:
$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \wedge |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{BC}| \vee |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \wedge |\overrightarrow{AC}| \neq |\overrightarrow{AB}| \wedge |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \wedge |\overrightarrow{AC}| \neq |\overrightarrow{AB}|$

b) Ein Punkt D, der das Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzt, errechnet sich z. B. aus $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Es gibt insgesamt 3 Punkte D_1, D_2 und D_3, die das Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzen (siehe Grafik).

<u>Klausuraufschrieb</u>



a) $$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-0 \\ 4-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{32}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} 6-4 \\ 6-0 \\ 2-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{44}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} 6-0 \\ 6-4 \\ 2-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{44}$$

Wegen $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \wedge |\overrightarrow{AC}| \neq |\overrightarrow{AB}|$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

b) $$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$
$$= \begin{pmatrix} 4-4+2 \\ 0+4+6 \\ 4+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $D_1(2|10|2)$ ist ein Punkt, der das Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzt.

Die weiteren Punkte:

$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ 0-2 \\ 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4+6 \\ 0+2 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es gibt insgesamt 3 Punkte, die das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm ergänzen.

Lösung A7

Lösungslogik

a) Wegen fehlender x_2-Koordinate verläuft die Ebene parallel zur x_2–Achse. Wir bestimmen die Spurpunkte der Ebene mit der x_1– und x_3–Achse und zeichnen die Ebene in ein Koordinatensystem.

b) Alle Punkte der x_3–Achse haben die Koordinaten $P(0|0|p_3)$. Die Punkte, die zu E den Abstand 3 haben, bestimmen wir mithilfe der HNF.

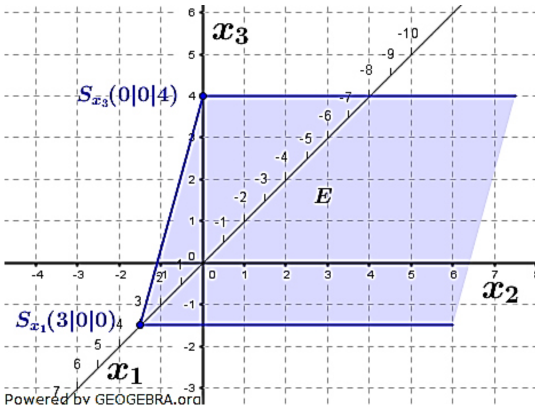
Klausuraufschrieb

a) $4x_1 + 3x_3 = 12$ | $:12$

$\frac{x_1}{3} + \frac{x_3}{4} = 1$ | Achsenabschnittsform

$S_{x_1}(3|0|0)$; $S_{x_3}(0|0|4)$

b) Punkte der x_3–Achse haben die Koordinaten $P(0|0|p_3)$.
Abstandsbestimmung $d = 3$ über die HNF.



$d = 3 = \frac{|4x_1+3x_3-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$\frac{|4\cdot 0+3\cdot p_3-12|}{\sqrt{25}} = 3$ | Punktprobe mit P

$3p_{3_1} - 12 = 15$ | betragslose Berücksichtigung

$p_{3_1} = 9$

$3p_{3_2} - 12 = -15$ | Betragsberücksichtigung

$p_{3_2} = -1$

Die Punkte $P_1(0|0|9)$ und $P_2(0|0|-1)$ der x_3-Achse haben von E den Abstand 3.

Lösung A8

a) X ist binomialverteilt, weil es nur zwei Ergebnisse gibt mit immer gleichen Wahrscheinlichkeiten bei jedem Zug, nämlich $P(rot) = 0{,}2$ und $P(\overline{rot}) = 0{,}8$.

b) Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 3–mal rot ist $P(X \geq 3)$, bzw.
$1 - P(X \leq 2)$. Aus der Tabelle ergibt sich somit:
$1 - P(X \leq 2) = 1 - (0{,}01 + 0{,}06 + 0{,}14) = 0{,}79$.
Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 3–mal rot beträgt $79\,\%$.

c) $\mu = n \cdot p$
Das Maximum in der Tabelle liegt für $k = 4$ bei $0{,}22$.
Damit ist der Erwartungswert $E(X) = \mu = 4$.
$4 = n \cdot 0{,}2 \implies n = 20$
Der Tabelle liegt der Wert $n = 20$ zugrunde.

Lösung A9

Lösungslogik

Die Funktionsgleichung des Integranden mit $g(x) = 4 - \frac{1}{2}x$ ist eine Gerade. Wir fertigen eine Skizze an und treffen unsere Entscheidung.

Klausuraufschrieb

Eine Gerade g mit $g(x) = 4 - \frac{1}{2}x$ rotiert im Intervall $I = [0; 4]$ um die x–Achse. Als Rotationskörper entsteht ein Kegelstumpf.