Lösung A1

$f(x) = (4+e^{3x})^5$ Kettenregel erforderlich

$f'(u \circ v) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$

$u = 4 + e^{3x}$ $u' = 3e^{3x}$

$v(u(x)) = u^5$ $v'(u(x)) = 5u^4$

$f'(x) = 5 \cdot (4+e^{3x})^4 \cdot 3e^{3x}$

$f'(x) = 15e^{3x} \cdot (4+e^{3x})^4$

Lösung A2

$\int_0^\pi \left(4x - sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx$ Summenregel mit linearer Substitution

---

$$\int_0^\pi \left(4x - sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx = \int_0^\pi 4x dx - \int_0^\pi \sin\left(\frac{1}{2}x\right) dx$$
$$= \left[2x^2 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_0^\pi = 2\pi^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\cos(0)$$
$$= 2\pi^2 + 0 - 2 = 2(\pi^2 - 1)$$

Lösung A3

$(x^3 - 3x) \cdot (e^{2x} - 5) = 0$ Satz vom Nullprodukt

$x^3 - 3x = 0$ | 1. Faktor, Faktorisieren x

$x(x^2 - 3) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 3 \Longrightarrow x_2 = \sqrt{3};\ x_3 = -\sqrt{3}$

$e^{2x} - 5 = 0$ | 2. Faktor

$e^{2x} = 5$ | ln

$2x = ln(5)$ | $:2$

$x_4 = \frac{1}{2} ln(5)$

$\mathbb{L} = \left\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}; \frac{1}{2} ln(5)\right\}$

Lösung A4

<u>Lösungslogik</u>

Die allgemeine Gleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades lautet:
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Wegen des Hochpunktes im Ursprung ist $d = 0$, außerdem ist dieser Berührpunkt einer doppelte Nullstelle, sodass sich die Gleichung reduziert auf:
$f(x) = ax^2(x + x_3) = ax^3 + bx^2$.
Der Graph hat eine Tangente in $x = 2$. Den zugehörigen y–Wert errechnen wir über die Tangentengleichung. Mit dem errechneten Punkt machen wir eine Punktprobe mit $f(x)$. Außerdem soll gelten $f'(2) = 4$.
Wir erhalten aus den beiden Bedingungen ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, welches wir nach a und b auflösen.

Klausuraufschrieb
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Berührpunkt im Ursprung: $\Longrightarrow$ $d = 0$; $f(x) = ax^2(x + x_3) = ax^3 + bx^2$
Berührpunkt Tangente in $x = 2$: $\Longrightarrow$ $y = 4 \cdot 2 - 12 = -4$
Koordinaten des Tangentenpunktes $P(2|-4) \Longrightarrow$ $f(2) = -4$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$
$f(2) = 8a + 4b = -4 \Longrightarrow$ $b = -1 - 2a$
$f'(2) = 12a + 4b = 4$
$b \longrightarrow f'(1) \Longrightarrow$ $12a + 4(-1 - 2a) = 4$
$4a - 4 = 4 \Longrightarrow$ $a = 2$
$a \longrightarrow b$
$b = -1 - 2 \cdot 2 \Longrightarrow$ $b = -5$
$f(x) = 2x^3 - 5x^2$

Lösung A5

(1) *Der Graph von f hat bei $x = -3$ einen Tiefpunkt.*
Die Aussage ist wahr. Das Schaubild der Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle $x = -3$ einen Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$.

(2) $f(-2) < f(-1)$
Die Aussage ist wahr. f' verläuft für $-3 < x < 0$ oberhalb der x -Achse. f ist somit in diesem Bereich monoton steigend, also ist $f(-2) < f(-1)$.

(3) $f''(-2) + f'(-2) < 1$*.*
Die Aussage ist falsch. Die Funktion f' hat für $x = -2$ einen Hochpunkt. Somit ist $f''(-2) = 0$. $f'(-2) = 2$ (aus Grafik abgelesen). Somit ist $f''(-2) + f'^{(-2)} = 2 > 1$.

(4) *Der Grad der Funktion f ist mindestens* 4*.*
Die Aussage ist wahr. Der Grad der Funktion f' ist mindestens 3. Durch die Integration von f' entsteht die Funktion f von damit mindestens dem Grad 4.

Lösung A6

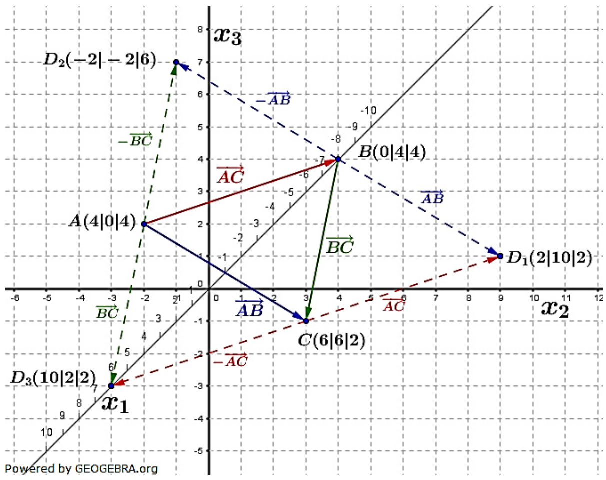
Lösungslogik

Wir zeichnen zunächst die Punkte und das Dreieck in ein Koordinatensystem.

a) Das Dreieck ist gleichschenklig, wenn 2 Seiten gleich lang sind und die dritte Seite eine ungleiche Länge aufweist. Somit gilt:
$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \wedge |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{BC}| \vee |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \wedge |\overrightarrow{AC}| \neq |\overrightarrow{AB}| \wedge |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \wedge |\overrightarrow{AC}| \neq |\overrightarrow{AB}|$

b) Ein Punkt D, der das Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzt, errechnet sich z. B. aus $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Es gibt insgesamt 3 Punkte D_1, D_2 und D_3, die das Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzen (siehe Grafik).

Klausuraufschrieb



a) $$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-0 \\ 4-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{32}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} 6-4 \\ 6-0 \\ 2-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{44}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} 6-0 \\ 6-4 \\ 2-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{44}$$

Wegen $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \wedge |\overrightarrow{AC}| \neq |\overrightarrow{AB}|$ *ist das Dreieck* ABC *gleichschenklig.*

b) $$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$
$$= \begin{pmatrix} 4-4+2 \\ 0+4+6 \\ 4+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $D_1(2|10|2)$ *ist ein Punkt, der das Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzt.*

Die weiteren Punkte:

$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ 0-2 \\ 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4+6 \\ 0+2 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es gibt insgesamt 3 *Punkte, die das Dreieck* ABC *zu einem Parallelogramm ergänzen.*

Lösung A7

Lösungslogik

a) Wegen fehlender x_2-Koordinate verläuft die Ebene parallel zur x_2–Achse. Wir bestimmen die Spurpunkte der Ebene mit der x_1– und x_3–Achse und zeichnen die Ebene in ein Koordinatensystem.

b) Alle Punkte der x_3–Achse haben die Koordinaten $P(0|0|p_3)$. Die Punkte, die zu E den Abstand 3 haben, bestimmen wir mithilfe der HNF.

Klausuraufschrieb

a) $4x_1 + 3x_3 = 12$ | $:12$

$\frac{x_1}{3} + \frac{x_3}{4} = 1$ | Achsenabschnittsform

$S_{x_1}(3|0|0)$; $S_{x_3}(0|0|4)$

b) Punkte der x_3–Achse haben die Koordinaten $P(0|0|p_3)$.
Abstandsbestimmung $d = 3$ über die HNF.

$d = 3 = \frac{|4x_1+3x_3-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$\frac{|4\cdot 0+3\cdot p_3-12|}{\sqrt{25}} = 3$ | Punktprobe mit P

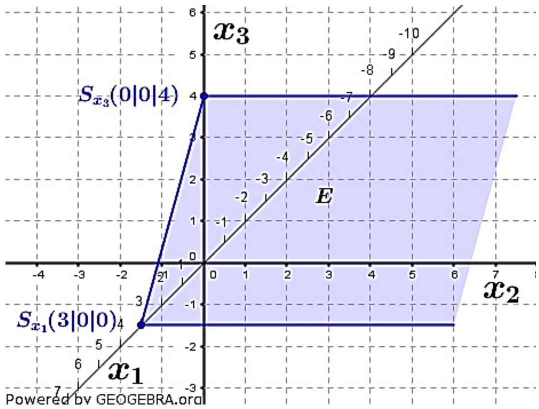
$3p_{3_1} - 12 = 15$ | betragslose Berücksichtigung

$p_{3_1} = 9$

$3p_{3_2} - 12 = -15$ | Betragsberücksichtigung

$p_{3_2} = -1$

Die Punkte $P_1(0|0|9)$ und $P_2(0|0|-1)$ der x_3-Achse haben von E den Abstand 3.



Lösung A8

a) X ist binomialverteilt, weil es nur zwei Ergebnisse gibt mit immer gleichen Wahrscheinlichkeiten bei jedem Zug, nämlich $P(rot) = 0{,}2$ und $P(\overline{rot}) = 0{,}8$.

b) Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 3–mal rot ist $P(X \geq 3)$, bzw. $1 - P(X \leq 2)$. Aus der Tabelle ergibt sich somit:
$1 - P(X \leq 2) = 1 - (0{,}01 + 0{,}06 + 0{,}14) = 0{,}79$.
Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 3–mal rot beträgt $79\,\%$.

c) $\mu = n \cdot p$
Das Maximum in der Tabelle liegt für $k = 4$ bei $0{,}22$.
Damit ist der Erwartungswert $E(X) = \mu = 4$.
$4 = n \cdot 0{,}2 \;\Rightarrow\; n = 20$
Der Tabelle liegt der Wert $n = 20$ zugrunde.

Lösung A9

Lösungslogik

Die Funktionsgleichung des Integranden mit $g(x) = 4 - \frac{1}{2}x$ ist eine Gerade. Wir fertigen eine Skizze an und treffen unsere Entscheidung.

Klausuraufschrieb

Eine Gerade g mit $g(x) = 4 - \frac{1}{2}x$ rotiert im Intervall $I = [0; 4]$ um die x–Achse. Als Rotationskörper entsteht ein Kegelstumpf.