

Aufgabe A1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (3 + \cos(x))^4$.

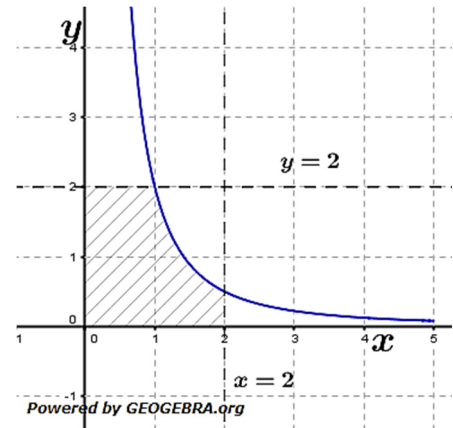


Aufgabe A2

Lösen Sie die Gleichung $e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$.

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x^2}; x > 0$.
Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



Aufgabe A4

Sind die folgenden Aussagen wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

- a) Jede Funktion, deren Ableitung eine Nullstelle hat, besitzt eine Extremstelle.
- b) Jede ganzrationale Funktion vierten Grades hat eine Extremstelle.

Aufgabe A5

Gegeben sind die Ebenen $E: x_1 + 3x_2 = 6$ und $F: \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

- a) Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
- b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E und F .
- c) Ermitteln Sie eine Gleichung einer Geraden, die in E enthalten ist und mit F keinen Punkt gemeinsam hat.

Aufgabe A6

Gegeben sind eine Ebenen E ein Punkt P in E sowie ein weiterer Punkt S , der nicht in E liegt.

Der Punkt S ist die Spitze eines geraden Kegels, dessen Grundkreis in E liegt und durch P verläuft. Die Strecke \overline{PQ} bildet den Durchmesser des Grundkreises.

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Koordinaten des Punktes Q bestimmen kann.

Aufgabe A7

In einer Urne liegen drei rote, zwei grüne und eine blaue Kugel. Es werden solange nacheinander einzelne Kugeln gezogen und zur Seite gelegt, bis man eine rote Kugel erhält.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man höchstens drei Kugeln zieht.

Lösung A1

$$f(x) = (3 + \cos(x))^4$$

Potenzregel und Kettenregel erforderlich

$$f'(x) = 4 \cdot (3 + \cos(x))^3 \cdot (-\sin(x))$$

$$f'(x) = -4\sin(x) \cdot (3 + \cos(x))^3$$

Lösung A2

$$e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$$

Substitution und quadratische Gleichung

Substitution: $e^{2x} = z$

$$z^2 - 5 = 4z$$

$$z^2 - 4z - 5 = 0$$

$$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 5}$$

$$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{9} = 2 \pm 3$$

$$z_1 = 5; z_2 = -1$$

Resubstitution:

$$e^{2x_1} = 5$$

$$2x_1 = \ln(5) \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln(5)$$

$$e^{2x_2} = -1$$

| $-4z$
| quadratische Gleichung
| p/q -Formel

| \ln
| keine Lösung, da Exponentialausdruck
| immer größer Null ist.

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2} \cdot \ln(5) \right\}$$

Lösung A3

Lösungslogik

In der Grafik erkennen wir, dass sich die zu berechnende Fläche zusammensetzt aus den Teilflächen A_1 und A_2 . Während A_1 ein Rechteck mit den Kantenlängen $a = 1$ und $b = 2$ ist, muss A_2 über das Integral unter der Kurve von $a = 1$ bis $b = 2$ berechnet werden.

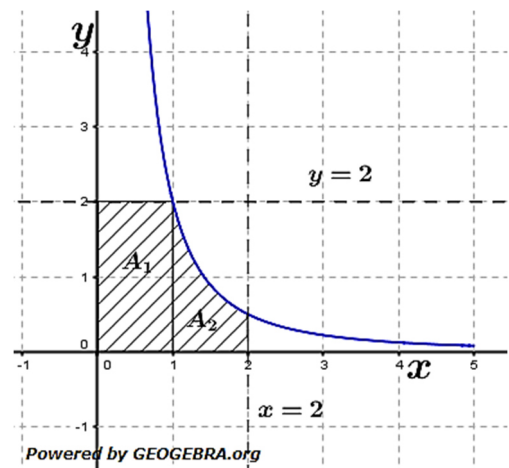
Klausuraufschrieb

$$A = A_1 + A_2 = 1 \cdot 2 + \int_1^2 \frac{2}{x^2} dx$$

$$A = 2 + \left[-\frac{2}{x} \right]_1^2 = 2 - 1 - (-2)$$

$$A = 3$$

Die Fläche hat den Inhalt 3 FE.



Lösung A4

- 1) Die Aussage ist falsch. Es fehlt die Angabe „Nullstelle mit Vorzeichenwechsel“.

Gegenbeispiel: Die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = 3x^2$ der Funktion f mit $f(x) = x^3$ hat die doppelte Nullstelle $x_{1,2} = 0$, jedoch dort keine Extremstelle, sondern eine waagrechte Tangente.

- 2) Die Aussage ist wahr.

Begründung: In der Mathematik gilt für „eine Extremstelle“ die Aussage „mindestens eine Extremstelle“. Per Definition hat eine Extremstelle die Steigung $f'(x) = 0$. Dies ist beispielsweise bei jeder Funktion $f(x) = a \cdot x^4$; $a \in \mathbb{R}^*$ der Fall.

Lösung A5

Lösungslogik

- a) Bestimmung der Spurpunkte der Ebene E und Zeichnung (siehe Grafik).
 b) Wir wandeln die Ebene F in die Koordinatenform um und ermitteln die Schnittgerade über $E \cap F$.
 c) Der Richtungsvektor \vec{rv}_g einer Gerade in E , die keinen gemeinsamen Punkt mit F hat, muss senkrecht auf dem Normalenvektor der Ebene stehen. Als Aufpunkt der Geraden wählen wir einen beliebigen Punkt der Ebene E (Spurpunkte bereits berechnet) und ermitteln den Richtungsvektor \vec{rv}_g über das Skalarprodukt aus \vec{rv}_g und \vec{n}_E mit $\vec{rv}_g \circ \vec{n}_E = 0$.

Klausuraufschrieb

- a) Spurpunkte von E :

$S_{x_1} = (6|0|0)$ $S_{x_2} = (0|2|0)$

Zeichnung: siehe Grafik.

- b) Umwandlung F in Koordinatenform:

$F: 2x_1 - x_3 - (4 - 3) = 0$

$2x_1 - x_3 = 1$

$E \cap F$:

$E: x_1 + 3x_2 = 6$

$F: 2x_1 - x_3 = 1$

Freie Wahl, z.B. $x_3 = t$

$2x_1 - t = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$

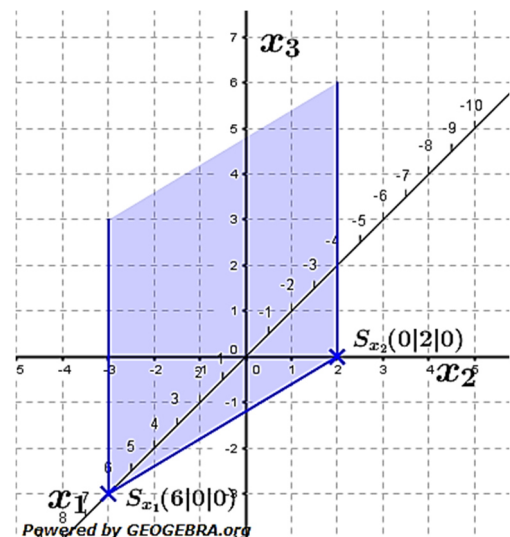
$x_1 \rightarrow E$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + 3x_2 = 6$

$3x_2 = \frac{11}{2} - \frac{1}{2}t \Rightarrow x_2 = \frac{11}{6} - \frac{1}{6}t$

$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \mid \frac{11}{6} - \frac{1}{6}t \mid t \right) \right\}$

S_{x_3} nicht existent.



Abituraufgaben Analytische Geometrie (Pflichtteil) ab 2017

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ \frac{11}{6} - \frac{1}{6}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{11}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{11}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + t^* \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad t^* \in \mathbb{R}$$

c) $h: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{rv}_h$

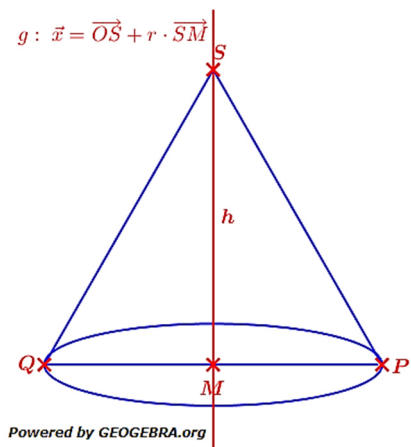
Wir wählen einen Punkt in E aber nicht in F , z. B. einen Spurpunkt der Ebene E mit $S_{x_1}(6|0|0)$. Die Gerade h verläuft dann parallel zur Schnittgeraden g . Dadurch ist $h \notin F$.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$$

Lösung A6

Lösungslogik

Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation. Wir müssen eine Gerade durch die Spitze des Kegels legen mit dem Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor. Wir schneiden diese Gerade mit der Ebene und erhalten den Lotfußpunkt, der gleichzeitig Mittelpunkt des Grundkreises ist. Die Koordinaten des Punktes erhalten wir über die Linearkombination $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PM}$.



Klausuraufschrieb

Aufstellen einer Gerade g mit s als Aufpunkt und dem Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor.

Über $g \cap E$ Ermittlung des Mittelpunktes des Grundkreises.

Die Koordinaten von Q errechnen sich danach aus $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PM}$

Lösung A7

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen mit $P(\text{rot}) = \frac{3}{6}$ und $P(\overline{\text{rot}}) = \frac{3}{6}$ im ersten Zug. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl gezogener Kugeln. Damit gilt:

$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$P(X = 0)$ kommt nicht vor, da man ja sonst nicht ziehen würde.

$$P(X \leq 3) = P(\text{rot}) + P(\overline{\text{rot}}; \text{rot}) + P(\overline{\text{rot}}; \overline{\text{rot}}; \text{rot})$$

$$P(X \leq 3) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{60}{120} + \frac{36}{120} + \frac{8}{120} = \frac{104}{120}$$

$$P(X \leq 3) = \frac{57}{60}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens drei Kugeln zieht beträgt $\frac{57}{60}$.