Lösung A1

$f(x) = (3 + \cos(x))^4$ Potenzregel und Kettenregel erforderlich

---

$f'(x) = 4 \cdot (3 + \cos(x))^3 \cdot (-si\,n(x))$
$f'(x) = -4\sin(x) \cdot (3 + \cos(x))^3$

Lösung A2

$e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$ Substitution und quadratische Gleichung

---

Substitution: $e^{2x} = z$

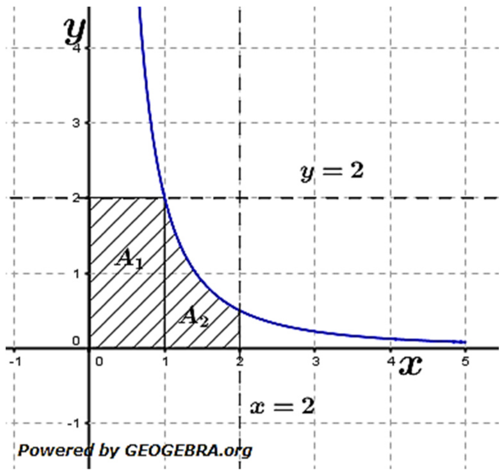
$z^2 - 5 = 4z$	|	$-4z$
$z^2 - -4z - 5 = 0$	|	quadratische Gleichung
$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5}$	|	p/q-Formel
$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{9} = 2 \pm 3$		
$z_1 = 5;\ \ z_2 = -1$		
Resubstitution:		
$e^{2x_1} = 5$	|	ln
$2x_1 = \ln(5) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2} \cdot ln(5)$		
$e^{2x_2} = -1$	|	keine Lösung, da Exponentialausdruck
	|	immer größer Null ist.

$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2} \cdot ln(5)\right\}$

Lösung A3

Lösungslogik

In der Grafik erkennen wir, dass sich die zu berechnende Fläche zusammensetzt aus den Teilflächen A_1 und A_2. Während A_1 ein Rechteck mit den Kantenlängen $a = 1$ und $b = 2$ ist, muss A_2 über das Integral unter der Kurve von $a = 1$ bis $b = 2$ berechnet werden.



Klausuraufschrieb

$A = A_1 + A_2 = 1 \cdot 2 + \int_1^2 \frac{2}{x^2}\,dx$

$A = 2 + \left[-\frac{2}{x}\right]_1^2 = 2 - 1 - (-2)$

$A = 3$

Die Fläche hat den Inhalt $3\,FE$.

Lösung A4

1) Die Aussage ist falsch. Es fehlt die Angabe „Nullstelle mit Vorzeichenwechsel".

Gegenbeispiel: Die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = 3x^2$ der Funktion f mit $f(x) = x^3$ hat die doppelte Nullstelle $x_{1,2} = 0$, jedoch dort keine Extremstelle, sondern eine waagrechte Tangente.

2) Die Aussage ist wahr.
Begründung: In der Mathematik gilt für „eine Extremstelle" die Aussage „mindestens eine Extremstelle".
Per Definition hat eine Extremstelle die Steigung $f'(x) = 0$.
Dies ist beispielsweise bei jeder Funktion
$f(x) = a \cdot x^4;\ \ a\ \in\ \ \mathbb{R}^*$ der Fall.

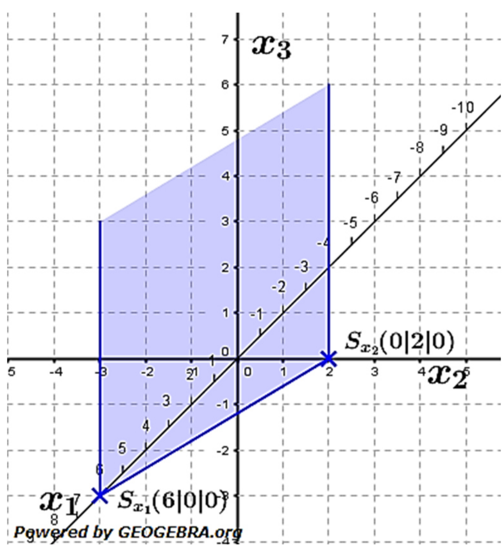
Lösung A5

Lösungslogik

a) Bestimmung der Spurpunkte der Ebene E und Zeichnung (siehe Grafik).
b) Wir wandeln die Ebene F in die Koordinatenform um und ermitteln die Schnittgerade über $E \cap F$.
c) Der Richtungsvektor $\overrightarrow{rv_g}$ einer Gerade in E, die keinen gemeinsamen Punkt mit F hat, muss senkrecht auf dem Normalenvektor der Ebene stehen. Als Aufpunkt der Geraden wählen wir einen beliebigen Punkt der Ebene E (Spurpunkte bereits berechnet) und ermitteln den Richtungsvektor $\overrightarrow{rv_g}$ über das Skalarprodukt aus $\overrightarrow{rv_g}$ und $\overrightarrow{n_E}$ mit $\overrightarrow{rv_g} \circ \overrightarrow{n_E} = 0$.

Klausuraufschrieb

a) Spurpunkte von E:
$S_{x_1} = (6|0|0)$ $\quad$ $S_{x_2} = (0|2|0)$ $\quad$ S_{x_3} nicht existent.
Zeichnung: siehe Grafik.



b) Umwandlung F in Koordinatenform:
$F\colon\ 2x_1 - x_3 - (4-3) = 0$
$\quad 2x_1 - x_3 = 1$
$E \cap F$:
$E\colon\ x_1 + 3x_2 = 6$
$F\colon\ 2x_1 - x_3 = 1$
Freie Wahl, z.B. $x_3 = t$
$2x_1 - t = 1 \Longrightarrow\ \ x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$
$x_1 \longrightarrow E$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + 3x_2 = 6$
$3x_2 = \frac{11}{2} - \frac{1}{2}t \Longrightarrow\ \ x_2 = \frac{11}{6} - \frac{1}{6}t$
$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \middle| \frac{11}{6} - \frac{1}{6}t \middle| t\right)\right\}$

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \\ \frac{11}{6}-\frac{1}{6}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{11}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{11}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + t^*\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix};\quad t^* \in \mathbb{R}$$

c) $h\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{rv_h}$

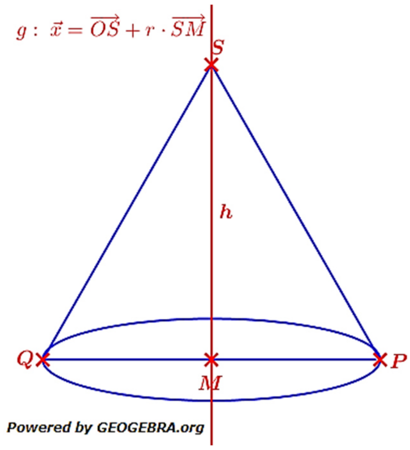
Wir wählen einen Punkt in E aber nicht in F, z. B. einen Spurpunkt der Ebene E mit $S_{x_1}(6|0|0)$. Die Gerade h verläuft dann parallel zur Schnittgeraden g. Dadurch ist $h \notin F$.

$$h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix};\quad s \in \mathbb{R}$$

Lösung A6

Lösungslogik

Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation. Wir müssen eine Gerade durch die Spitze des Kegels legen mit dem Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor. Wir schneiden diese Gerade mit der Ebene und erhalten den Lotfußpunkt , der gleichzeitig Mittelpunkt des Grundkreises ist. Die Koordinaten des Punktes erhalten wir über die Linearkombination $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PM}$.



Klausuraufschrieb

Aufstellen einer Gerade g mit S als Aufpunkt und dem Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor.

Über $g \cap E$ Ermittlung des Mittelpunktes des Grundkreises.

Die Koordinaten von Q errechnen sich danach aus $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PM}$

Lösung A7

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen mit $P(rot) = \frac{3}{6}$ und $P(\overline{rot}) = \frac{3}{6}$ im ersten Zug. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl gezogener Kugeln. Damit gilt:

$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$P(X = 0)$ kommt nicht vor, da man ja sonst nicht ziehen würde.

$P(X \leq 3) = P(rot) + P(\overline{rot}; rot) + P(\overline{rot}; \overline{rot}; rot)$

$P(X \leq 3) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{60}{120} + \frac{36}{120} + \frac{8}{120} = \frac{104}{120}$

$P(X \leq 3) = \frac{57}{60}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens drei Kugeln zieht beträgt $\frac{57}{60}$.