Abituraufgaben allg. bildendes Gymnasium Pflichtteil 2018 BW

Aufgabe A1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x^2)$.

Aufgabe A2

Untersuchen Sie, ob der Wert des Integrals $\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2}\, dx$ ganzzahlig ist.

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x^2 - 4x + 5$. F ist eine Stammfunktion von f.
Bestimmen Sie die Stelle, an der die Graphen von F und f parallele Tangenten besitzen.

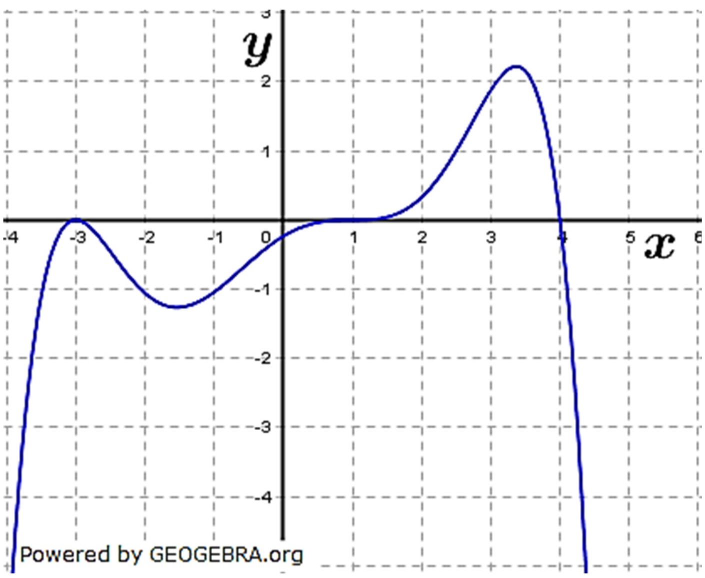
Aufgabe A4

Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(1) Im Bereich $-3{,}5 \leq x \leq 4{,}5$ besitzt f genau drei Extremstellen.

(2) Die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x$ hat im abgebildeten Bereich genau zwei Lösungen.

(3) Die Funktion f'' hat an der Stelle $x = -3$ einen Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Werten.



Aufgabe A5

Gegeben sind die Ebenen $E\colon 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$ und die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$.

Die Gerade g liegt in E.

a) Bestimmen Sie die Werte für a und b.

b) Geben Sie eine Gleichung h einer Geraden an, die ebenfalls in E liegt und senkrecht zur Geraden g verläuft.

Aufgabe A6

Gegeben ist die Ebene $E\colon\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$.

a) Begründen Sie, dass die Spurpunkte von E die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks bilden.

b) Die Ebene $F\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet die Ebene E.
Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden s von E und F.

Aufgabe A7

Zwei ideale Würfel werden gleichzeitig geworfen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei verschiedene Augenzahlen fallen.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine „1“ und eine „2“?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigen die Würfel zwei aufeinanderfolgende Zahlen?

Lösung A1

$f(x) = \sqrt{x} \cdot sin\,(x^2)$ Produktregel und Kettenregel erforderlich

---

$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$

$u = \sqrt{x}$ $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v = sin\,(x^2)$ $v' = 2x \cdot cos\,(x^2)$

$f'(x) = \frac{sin(x^2)}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x} \cdot cos(x^2) = \frac{sin(x^2)+4x^2 cos\,(x^2)}{2\sqrt{x}}$

Lösung A2

$\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2}\,dx$ Stammfunktion ist $ln\,(\dots)$!

$\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2}\,dx = [\ln(x-2)]_3^{e+2} = \ln(e+2-2) - \ln\,(3-2)$

$= \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

Der Wert des gegebenen Integrals ist ganzzahlig.

Lösung A3

Lösungslogik

Parallele Tangenten bedeutet, dass die Graphen der Funktionen von F als auch f Stellen mit derselben Steigung besitzen.
Steigungen von F bestimmen wir über die erste Ableitung $F' = f$ (gemäß Aufgabenstellung). Die Steigung von f bestimmen wir über die erste Ableitung von f was der zweiten Ableitung von F entspricht.
Somit muss für die Stelle, an der F und f dieselbe Steigung haben, gelten:
$f = f'$.

Klausuraufschrieb

$f(x) = 4x^2 - 4x + 5; \quad f'(x) = 8x - 4$

$f(x) \cap f'(x)$

$4x^2 - 4x + 5 = 8x - 4$ | $-8x;\ +4$

$4x^2 - 12x + 9 = 0$ | $:4$

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$

$x_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - \frac{9}{4}}$ | p/q-Formel

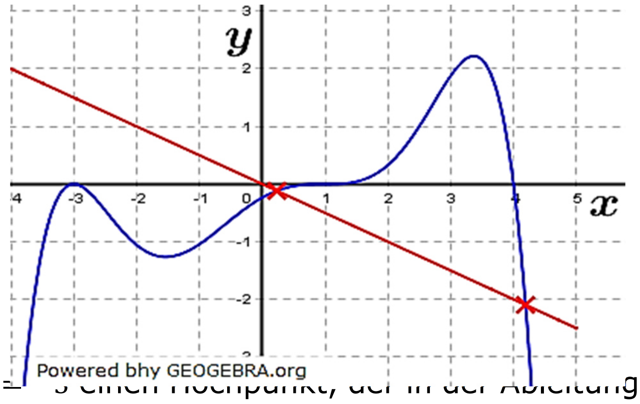
$x_1 = 1{,}5$

An der Stelle $x_1 = 1{,}5$ besitzen F und f dieselbe Steigung.

Lösung A4

(1) *Im Bereich* $-3{,}5 \le x \le 4{,}5$ *besitzt* f *genau drei Extremstellen.*
Die Aussage ist falsch. f' hat im Intervall zwei Nullstelle mit VZW. Damit besitzt f im Intervall nur zwei Extremstellen.

(2) *Die Gleichung* $f'(x) = -\frac{1}{2}x$ *hat im abgebildeten Bereich genau zwei Lösungen.*
Die Aussage ist richtig. Wir zeichnen den Graphen von $y = -\frac{1}{2}x$ in die gegebene Graphik ein und stellen fest, dass es zwei Schnittpunkte gibt.



(3) *Die Funktion* f'' *hat an der Stelle* $x = -3$ *einen Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Werten.*
Die Aussage ist wahr. f' hat bei $x = -3$ einen Hochpunkt, der in der Ableitung zu einer Nullstelle mit VZW von „+" nach „-„ führt.

Lösung A5

Lösungslogik

a) Zur Bestimmung von b machen wir eine Punktprobe mit dem Aufpunkt von g in E.
Nachdem b bekannt ist, bestimmen wirt einen weiteren Punkt Q der Geraden mit $s = 1$. Aus der Punktprobe mit Q bestimmt sich a.

b) Die Gerade h hat denselben Aufpunkt wie g. Der Richtungsvektor $\overrightarrow{rv_h}$ von h muss senkrecht auf dem Richtungsvektor von g als auch E stehen, mit anderen Worten:

$$\overrightarrow{rv_h} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \wedge \overrightarrow{rv_h} \circ \overrightarrow{n_E} = 0 \text{ bzw. } \overrightarrow{rv_h} = \overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{n_E}$$

Klausuraufschrieb

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \in E$:

$2 \cdot 1 + 2 \cdot b + 1 = 5 \quad | \quad -3$

$2 \cdot b = 2 \;=>\; b = 1$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1+a \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1+a \end{pmatrix} \in E$:

$2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 + a = 5 \quad | \quad -7$

$a = -2$

b) Die Gerade h hat denselben Aufpunkt wie g und den Richtungsvektor $\overrightarrow{rv_h}$.

$h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \overrightarrow{rv_h}$

Es gilt:

$\overrightarrow{rv_h} = \overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{n_E}$

$\overrightarrow{rv_h} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{rv_h} = \begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}$

$h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}$

Lösung A6

Lösungslogik

a) Wir bestimmen zunächst die drei Spurpunkte der Ebene und berechnen dann die Längen der einzelnen Dreiecksseiten.
Sind zwei Seiten gleich lang und die dritte Seite ungleich lang, so ist das Dreieck gleichschenklig.

b) Wir stellen die gegebene Parametergleichung von F um in eine Koordinatengleichung und schneiden den beiden Ebenen E und F zur Ermittlung der Schnittgerade s.

Klausuraufschrieb

a) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \qquad | \quad :4$

$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{4} = 1$ Achsenabschnittsform

$S_{x_1}(4|0|0);\quad S_{x_2}(0|2|0);\quad S_{x_3}(0|0|4)$

$\overrightarrow{S_{x_1}S_{x_2}} = \begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{S_{x_2}S_{x_3}} = \begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{S_{x_1}S_{x_3}} = \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{S_{x_1}S_{x_2}}\right| = \left|\overrightarrow{S_{x_2}S_{x_3}}\right| \neq \left|\overrightarrow{S_{x_1}S_{x_3}}\right|$

Das Dreieck $S_{x_1}S_{x_2}S_{x_3}$ ist gleichschenklig.

b) $F\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

$-16x_1 + 8x_2 + x_3 = d$

$-16 \cdot (-2) + 8 \cdot (-2) + 0 = d$

$d = 16$

$F\colon -16x_1 + 8x_2 + x_3 = 16$

$E\colon x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$

Wir wählen frei $x_3 = t$.

(1)	$-16x_1 + 8x_2 = 16 - t$		
(2)	$x_1 + 2x_2 = 4 + t$	|	$\cdot 4$
(1)	$-16x_1 + 8x_2 = 16 - t$		
(2)	$\underline{4x_1 + 8x_2 = 16 + 4t}$		
(1)-(2)	$-20x_1 = -5t$	|	$: -20$
	$x_1 = \frac{1}{4}t$		
$x_1 \to (2)$	$\frac{1}{4}t + 2x_2 = 4 + t$	|	$-\frac{1}{4}t;\ : 2$
	$x_2 = 2 + \frac{3}{8}t$		

Der Lösungsvektor ist $\vec{l} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t \\ 2 + \frac{3}{8}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

Die Gleichung der Schnittgeraden lautet:

$s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

Lösung A7

Bei gleichzeitigem Werfen von zwei idealen Würfeln hat jeder Wurf die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

a) A: „Zwei verschiedene Augenzahlen"
B: „Zwei gleiche Augenzahlen (Pasch)"
$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$

b) $P(\{(1;2), (2;1)\}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

c) P(zwei aufeinander folgende Augenzahlen) =
$P(12) \vee P(21) \vee P(23) \vee P(32) \vee P(34) \vee P(43) \vee P(45) \vee P(54) \vee P(56) \vee P(65) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$