

Lösung A1

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x^2)$$

Produktregel und Kettenregel erforderlich

$$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$v = \sin(x^2)$$

$$v' = 2x \cdot \cos(x^2)$$

$$f'(x) = \frac{\sin(x^2)}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x} \cdot \cos(x^2) = \frac{\sin(x^2) + 4x^2 \cos(x^2)}{2\sqrt{x}}$$

Lösung A2

$$\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2} dx$$

Stammfunktion ist $\ln(\dots)$!

$$\begin{aligned} \int_3^{e+2} \frac{1}{x-2} dx &= [\ln(x-2)]_3^{e+2} = \ln(e+2-2) - \ln(3-2) \\ &= \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Der Wert des gegebenen Integrals ist ganzzahlig.

Lösung A3

Lösungslogik

Parallele Tangenten bedeutet, dass die Graphen der Funktionen von F als auch f Stellen mit derselben Steigung besitzen.

Steigungen von F bestimmen wir über die erste Ableitung $F' = f$ (gemäß Aufgabenstellung). Die Steigung von f bestimmen wir über die erste Ableitung von f was der zweiten Ableitung von F entspricht.

Somit muss für die Stelle, an der F und f dieselbe Steigung haben, gelten:

$$f = f'$$

Klausuraufschrieb

$$f(x) = 4x^2 - 4x + 5; \quad f'(x) = 8x - 4$$

$$f(x) \cap f'(x)$$

$$4x^2 - 4x + 5 = 8x - 4$$

$$| \quad -8x; +4$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$| \quad :4$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = 1,5 \pm \sqrt{2,25 - \frac{9}{4}}$$

$$| \quad p/q\text{-Formel}$$

$$x_1 = 1,5$$

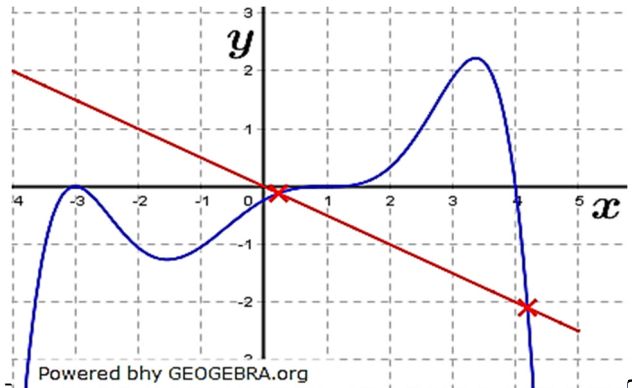
An der Stelle $x_1 = 1,5$ besitzen F und f dieselbe Steigung.

Lösung A4

(1) Im Bereich $-3,5 \leq x \leq 4,5$ besitzt f genau drei Extremstellen.
Die Aussage ist falsch. f' hat im Intervall zwei Nullstelle mit VZW. Damit besitzt f im Intervall nur zwei Extremstellen.

(2) Die Gleichung $f'(x) = -\frac{1}{2}x$ hat im abgebildeten Bereich genau zwei Lösungen.

Die Aussage ist richtig. Wir zeichnen den Graphen von $y = -\frac{1}{2}x$ in die gegebene Graphik ein und stellen fest, dass es zwei Schnittpunkte gibt.



(3) Die Funktion f'' hat an der Stelle $x = -3$ einen Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Werten.

Die Aussage ist wahr. f' hat bei $x = -3$ einen Hochpunkt, der in der Ableitung zu einer Nullstelle mit VZW von „+“ nach „-“ führt.

Lösung A5

Lösungslogik

a) Zur Bestimmung von b machen wir eine Punktprobe mit dem Aufpunkt von g in E .

Nachdem b bekannt ist, bestimmen wir einen weiteren Punkt Q der Geraden mit $s = 1$. Aus der Punktprobe mit Q bestimmt sich a .

b) Die Gerade h hat denselben Aufpunkt wie g . Der Richtungsvektor \vec{rv}_h von h muss senkrecht auf dem Richtungsvektor von g als auch E stehen, mit anderen Worten:

$$\vec{rv}_h \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \wedge \vec{rv}_h \circ \vec{n}_E = 0 \text{ bzw. } \vec{rv}_h = \vec{rv}_g \times \vec{n}_E$$

Klausuraufschrieb

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \in E:$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 1 + 2 \cdot b + 1 = 5 \\ 2 \cdot b = 2 \Rightarrow b = 1 \end{array} \quad | \quad -3$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1+a \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1+a \end{pmatrix} \in E:$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 + a = 5 \\ a = -2 \end{array} \quad | \quad -7$$

b) Die Gerade h hat denselben Aufpunkt wie g und den Richtungsvektor $\overrightarrow{rv_h}$.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \overrightarrow{rv_h}$$

Es gilt:

$$\overrightarrow{rv_h} = \overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{n_E}$$

$$\overrightarrow{rv_h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rv_h} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung A6

Lösungslogik

- a) Wir bestimmen zunächst die drei Spurpunkte der Ebene und berechnen dann die Längen der einzelnen Dreiecksseiten. Sind zwei Seiten gleich lang und die dritte Seite ungleich lang, so ist das Dreieck gleichschenkelig.
- b) Wir stellen die gegebene Parametergleichung von F um in eine Koordinatengleichung und schneiden den beiden Ebenen E und F zur Ermittlung der Schnittgerade s .

Klausuraufschrieb

- a) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$ | :4
 $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{4} = 1$ Achsenabschnittsform
 $S_{x_1}(4|0|0); S_{x_2}(0|2|0); S_{x_3}(0|0|4)$
 $\overrightarrow{S_{x_1}S_{x_2}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{S_{x_2}S_{x_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{S_{x_1}S_{x_3}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
 $|\overrightarrow{S_{x_1}S_{x_2}}| = |\overrightarrow{S_{x_2}S_{x_3}}| \neq |\overrightarrow{S_{x_1}S_{x_3}}|$
 Das Dreieck $S_{x_1}S_{x_2}S_{x_3}$ ist gleichschenkelig.

b) $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-16x_1 + 8x_2 + x_3 = d$$

$$-16 \cdot (-2) + 8 \cdot (-2) + 0 = d$$

$$d = 16$$

$$F: -16x_1 + 8x_2 + x_3 = 16$$

$$E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

Wir wählen frei $x_3 = t$.

$$(1) \quad -16x_1 + 8x_2 = 16 - t$$

$$(2) \quad x_1 + 2x_2 = 4 + t \quad | \quad \cdot 4$$

$$(1) \quad -16x_1 + 8x_2 = 16 - t$$

$$(2) \quad \underline{4x_1 + 8x_2 = 16 + 4t}$$

$$(1)-(2) \quad -20x_1 = -5t \quad | \quad : -20$$

$$x_1 = \frac{1}{4}t$$

$$x_1 \rightarrow (2) \quad \frac{1}{4}t + 2x_2 = 4 + t \quad | \quad -\frac{1}{4}t; : 2$$

$$x_2 = 2 + \frac{3}{8}t$$

Der Lösungsvektor ist $\vec{l} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t \\ 2 + \frac{3}{8}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^* \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

Die Gleichung der Schnittgeraden lautet:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Lösung A7

Bei gleichzeitigem Werfen von zwei idealen Würfeln hat jeder Wurf die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

- a) A: „Zwei verschiedene Augenzahlen“
 B: „Zwei gleiche Augenzahlen (Pasch)“

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$$

b) $P(\{(1; 2), (2; 1)\}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

- c) $P(\text{zwei aufeinander folgende Augenzahlen}) =$

$$P(12) \vee P(21) \vee P(23) \vee P(32) \vee P(34) \vee P(43) \vee P(45) \vee P(54) \vee P(56) \vee P(65) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$