Abituraufgaben Integral und Stammfunktion (Pflichtteil) ab 2004

Aufgabe A2/04

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x^2}+sin(2x)$ an.
(Quelle Abitur BW 2004)

Aufgabe A2/05

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=4cos\left(\frac{1}{4}x\right)-\frac{1}{4}x^4$.
(Quelle Abitur BW 2005)

Aufgabe A2/06

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}x^3$ an.
(Quelle Abitur BW 2006)

Aufgabe A2/07

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{ln(2)} e^{2x}dx$.
(Quelle Abitur BW 2007)

Aufgabe A2/08

G ist eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x)=2-3\cdot sin(4x)$. Der Punkt $P(0|1)$ liegt auf dem Schaubild von G. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von G.
(Quelle Abitur BW 2008)

Aufgabe A2/09

Berechnen Sie das Integral $\int_4^9\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)dx$.
(Quelle Abitur BW 2009)

Aufgabe A2/10

Berechnen Sie das Integral $\int_1^e\left(\frac{2}{x}+4x\right)dx$.
(Quelle Abitur BW 2010)

Aufgabe A2/11

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1(2x-1)^4dx$.
(Quelle Abitur BW 2011)

Aufgabe A2/12

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=2e^{4x}+\frac{3}{x^2}$.
(Quelle Abitur BW 2012)

Aufgabe A2/13

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=4sin(2x)$. Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(\pi)=7$.
(Quelle Abitur BW 2013)

Abituraufgaben Integral und Stammfunktion (Pflichtteil) ab 2004

Aufgabe A2/14

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3}\,dx$.

(Quelle Abitur BW 2014)

Aufgabe A2/15

Berechnen Sie das Integral $\int_0^\pi \left(4x - sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)dx$.

(Quelle Abitur BW 2015)

Aufgabe A2/16

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{48}{(2x-4)^3}$.

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(3) = 1$.

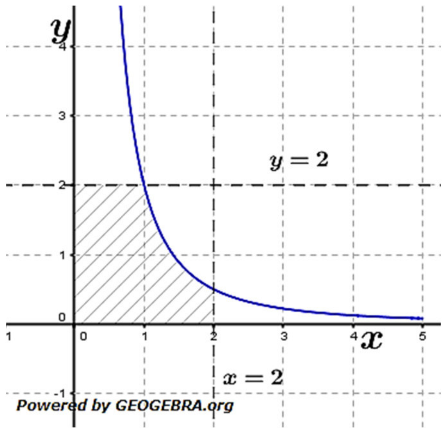
(Quelle Abitur BW 2016)

Aufgabe A3/17

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x^2}$; $x > 0$.

Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

(Quelle Abitur BW 2017)



Aufgabe A2/18

Untersuchen Sie, ob der Wert des Integrals $\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2}\,dx$ ganzzahlig ist.

(Quelle Abitur BW 2018)

Lösung A2/04

$f(x) = \frac{1}{x^2} + sin(2x)$ Summenregel mit Potenzregel

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} + sin(2x)\right) dx$$

$$F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{cos(2x)}{2} + C$$

Lösung A2/05

$f(x) = 4cos\left(\frac{1}{4}x\right) - \frac{1}{4}x^4$ Summenregel, Potenzregel, lineare Substitution

$$F(x) = \frac{4sin(\frac{1}{4}x)}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4 \cdot 5}x^5 + c$$

$$F(x) = 16sin\left(\frac{1}{4}x\right) - \frac{1}{20}x^5 + c$$

Lösung A2/06

$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^3$ Summenregel mit Potenzregel

$$F(x) = \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^3\right) dx = \int \left(4 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^3\right) dx = \frac{4x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2 \cdot 4}x^4 + c$$

$$F(x) = 8\sqrt{x} + \frac{1}{8}x^4 + c$$

Lösung A2/07

$\int_0^{ln(2)} e^{2x} dx$ lineare Substitution

$$\int_0^{ln(2)} e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} \cdot e^{2x}\right]_0^{ln(2)} = \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot ln(2)} - \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = 1{,}5$$

Lösung A2/08

$g(x) = 2 - 3 \cdot sin(4x)$ lineare Substitution

$$G(x) = \int (2 - 3 \cdot sin(4x)\, dx = 2x - \frac{3 \cdot (-cos(4x))}{4} + c = 2x + \frac{3}{4}cos(4x) + c$$

Punktprobe mit $P(0|1)$:

$$1 = 2 \cdot 0 + \frac{3}{4}cos(4 \cdot 0) + c$$

$$1 = +\frac{3}{4} \cdot 1 + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{4}$$

Der Funktionsterm für G lautet $G(x) = 2x + \frac{3}{4}cos(4x) + \frac{1}{4}$.

Lösung A2/09

$\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) dx$ Summenregel mit Potenzregel erforderlich

---

$$\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \int_4^9 \left(2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 1\right) dx = \left[\frac{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - x\right]_4^9 = [4 \cdot \sqrt{x} - x]_4^9$$
$$= 4 \cdot 3 - 9 - (4 \cdot 2 - 4) = -1$$

Lösung A2/10

$\int_1^e \left(\frac{2}{x} + 4x\right) dx$ Summenregel mit Potenzregel

---

$$\int_1^e \left(\frac{2}{x} + 4x\right) dx = [2ln(x) + 2x^2]_1^e = \left(2 \cdot ln(e) + 2e^2 - (2 \cdot ln(1) + 2)\right)$$
$$= (2 + 2e^2 - 0 - 2) = 2e^2$$

Lösung A2/11

$\int_0^1 (2x-1)^4 dx$ Potenzregel mit linearer Substitution

$$\int_0^1 (2x-1)^4 dx = \left[\frac{(2x-1)^5}{5 \cdot 2}\right]_0^1$$
$$= \left(0{,}1 - (-0{,}1)\right) = 0{,}2$$

Lösung A2/12

$f(x) = 2e^{4x} + \frac{3}{x^2}$ Summen-, Potenzregel, lineare Substitution

---

$$F(x) = \int \left(2e^{4x} + \frac{3}{x^2}\right) dx = 2 \cdot \int e^{4x} dx + 3 \cdot \int x^{-2} dx = \frac{2}{4} e^{4x} + \frac{3}{(-1)} \cdot x^{-1} + c$$
$$F(x) = \frac{1}{2} e^{4x} - \frac{3}{x} + c$$

Lösung A2/13

$f(x) = 4sin(2x)$ lineare Substitution

$$F(x) = \int 4sin(2x)dx = -\frac{4cos(2x)}{2} + c = -2cos(2x) + c$$
$$F(\pi) = 7 = -2cos(2\pi) + c$$
$$c = 7 + 2cos(2\pi) = 7 + 2 = 9$$
$$F(x) = -2cos(2x) + 9$$

Lösung A2/14

$\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3} dx$ Potenzregel mit linearer Substitution

---

$$\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3} dx = 4 \int_0^1 (2x+1)^{-3} dx = 4\left[\frac{(2x+1)^{-2}}{-2 \cdot 2}\right]_0^1 = -\left[\frac{1}{(2x+1)^2}\right]_0^1$$
$$= -\left(\frac{1}{9} - 1\right) = \frac{8}{9}$$

Lösung A2/15

$\int_0^{\pi} \left(4x - sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx$ Summenregel mit linearer Substitution

---

$$\int_0^{\pi} \left(4x - sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx = \int_0^{\pi} 4x dx - \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) dx$$
$$= \left[2x^2 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_0^{\pi} = 2\pi^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\cos(0)$$
$$= 2\pi^2 + 0 - 2 = 2(\pi^2 - 1)$$

Lösung A2/16

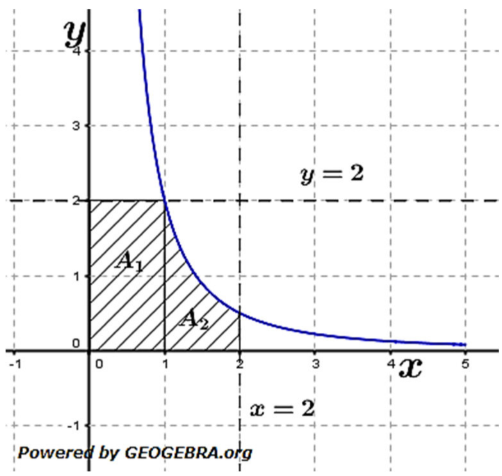
$f(x) = \frac{48}{(2x-4)^3}$ Potenzregel erforderlich

$$\int 48 \cdot (2x-4)^{-3}\, dx = 48 \cdot \frac{(2x-4)^{-2}}{-2 \cdot 2} + C = -\frac{12}{(2x-4)^2} + C$$
$$F(x) = -\frac{12}{(2x-4)^2} + C$$
$$1 = -\frac{12}{(2 \cdot 3 - 4)^2} + C$$
$$1 = -3 + C \Longrightarrow \quad C = 4$$
$$F(x) = -\frac{12}{(2x-4)^2} + 4$$

Lösung A3/17

<u>Lösungslogik</u>

In der Grafik erkennen wir, dass sich die zu berechnende Fläche zusammensetzt aus den Teilflächen A_1 und A_2. Während A_1 ein Rechteck mit den Kantenlängen $a = 1$ und $b = 2$ ist, muss A_2 über das Integral unter der Kurve von $a = 1$ bis $b = 2$ berechnet werden.



<u>Klausuraufschrieb</u>

$$A = A_1 + A_2 = 1 \cdot 2 + \int_1^2 \frac{2}{x^2} dx$$
$$A = 2 + \left[-\frac{2}{x}\right]_1^2 = 2 - 1 - (-2)$$
$$A = 3$$

Die Fläche hat den Inhalt $3\ FE$.

Lösung A2/18

$\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2} dx$ Stammfunktion ist $ln(\ldots)$!

$$\int_3^{e+2} \frac{1}{x-2} dx = [\ln(x-2)]_3^{e+2} = \ln(e+2-2) - \ln(3-2)$$
$$= \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$$

Der Wert des gegebenen Integrals ist ganzzahlig.