Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2014 BW

Aufgabe C1

In einem Gefäß G_1 sind 6 schwarze und 4 weiße Kugeln.
In einem Gefäß G_2 sind 3 schwarze und 7 weiße Kugeln.

a) Aus Gefäß G_1 wird 20 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 12 Mal eine schwarze Kugel gezogen wird.
Aus Gefäß G_2 wird 8 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 schwarze Kugeln gezogen werden, und zwar bei direkt aufeinander folgenden Zügen.

b) Nun werden aus G_1 zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in das Gefäß G_2 gelegt. Anschließend wird eine Kugel aus Gefäß G_2 gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel schwarz.

Aufgabe C2

Bei der Produktion von Bleistiften beträgt der Anteil der fehlerhaften Stifte erfahrungsgemäß $5\,\%$.

a) Ein Qualitätsprüfer entnimmt der Produktion zufällig 800 Stifte. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Stifte in dieser Stichprobe. Berechnen Sie $P(X \leq 30)$.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht der Wert von X um weniger als 10 vom Erwartungswert von X ab?

b) Der Betrieb erwirbt eine neue Maschine, von der behauptet wird, dass höchstens $2\,\%$ der von ihr produzierten Bleistifte fehlerhaft sind. Diese Hypothese H_0 soll mithilfe eines Tests an 800 zufällig ausgewählten Stiften überprüft werden.
Bei welcher Anzahl fehlerhafter Stifte entscheidet man sich gegen die Hypothese, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit maximal $5\,\%$ betragen soll.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2014 BW

Lösung C1

Lösungslogik

a) *Gefäß G_1:*
Bernoullikette $B_{20;\frac{3}{5}}(X \geq 12) = 1 - B_{20;\frac{3}{5}}(X \leq 11)$.

Gefäß G_2:
Kann mit der Bernoulliformel nicht berechnet werden. Es ist die Überlegung erforderlich, wie oft bei acht Zügen das Ziehen von 2 schwarzen Kugeln direkt aufeinander möglich ist. Dies ist siebenmal der Fall. Die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Fall beträgt $\left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^6$.

b) Zunächst müssen die Wahrscheinlichkeiten für $P(ss; sw; ws; ww)$ aus Gefäß G_1 berechnet werden. Da diese Kugeln in das Gefäß G_2 gelegt werden, ist die Verteilung in Gefäß G_2 entweder 5 schwarze und 7 weiße Kugeln (für $P_{G_1}(ss)$) oder 4 schwarze und 6 weiße Kugeln (für $P_{G_1}(sw; ws)$) oder 3 schwarze und 9 weiße Kugeln (für $P_{G_1}(ww)$). Somit ändert sich die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel aus G_2 von $\frac{5}{12}$ (für $P_{G_1}(ss)$) auf $\frac{4}{12}$ (für $P_{G_1}(sw; ws)$) auf $\frac{3}{12}$ (für $P_{G_1}(ww)$). Die Wahrscheinlichkeit für eine schwarze Kugel aus G_2 ist somit $P_{G_2}(s) = P_{G_1}(ss) \cdot \frac{5}{12} + P_{G_1}(sw; ws) \cdot \frac{4}{12} + P_{G_1}(ww) \cdot \frac{3}{12}$.

Klausuraufschrieb

a) *Gefäß G_1 Bernoullikette:*

$$B_{20;\frac{3}{5}}(X \geq 12) = 1 - B_{20;\frac{3}{5}}(X \leq 11) \overset{GTR}{=} 0{,}5955$$

```
1-binomcdf(20,3.▸
      .5955987232
```

Die Wahrscheinlichkeit mindestens 12 Mal eine schwarze Kugel aus Gefäß G_1 zu ziehen ist etwa $59{,}6\ \%$.

Gefäß G_2:
Die Wahrscheinlichkeit für genau 2 schwarze Kugeln ist:
$P_{G_2}(ss) = 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^6 = 0{,}0106$
2 schwarze Kugeln bei direkt aufeinander folgenden Zügen kommt in einer 8er-Kette genau 7 Mal vor, somit:
$P_{G_2}(ss)_{direkt\ aufeinander} = 7 \cdot P_{G_2}(ss) = 0{,}0741$
Die Wahrscheinlichkeit genau 2 schwarze Kugeln in direkt aufeinander folgenden Zügen zu ziehen beträgt etwa $7{,}4\ \%$.

b) $P_{G_1}(ss) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90}$ $\qquad$ $P_{G_1}(sw; ws) = 2 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{48}{90}$
$P_{G_1}(ww) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$
$P2_{P_1(ss)}(s) = \frac{30}{90} \cdot \frac{5}{12} = \frac{150}{1080}$ $\qquad$ $P2_{P_1(sw;ws)}(s) = \frac{48}{90} \cdot \frac{4}{12} = \frac{192}{1080}$
$P2_{P_1(ww)}(s) = \frac{12}{90} \cdot \frac{3}{12} = \frac{36}{1080}$
$P_{G_2}(s) = P2_{P_1(ss)}(s) + P2_{P_1(sw;ws)}(s) + P2_{P_1(ww)}(s) = \frac{150+192+36}{1080} = 0{,}3491$
Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel aus G_2 zu ziehen beträgt etwa $35\ \%$.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2014 BW

Lösung C2

Lösungslogik

Binomialverteilung mit $n = 800$, $p = 0{,}05$ und $k \leq 30$

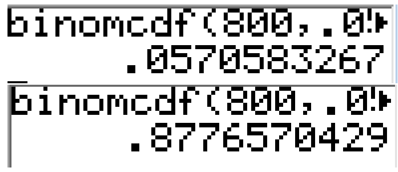
a) *$P(X \leq 30)$:*
$B_{800;0,05}(X \leq 30)$, Lösung per GTR.
Wahrscheinlichkeit für um weniger als 10 abweichenden Erwartungswert:
Erwartungswert $\mu = n \cdot p$. Gesucht ist $B_{800;0,05}(\mu - 10 < X < \mu + 10)$.

b) *Anzahl fehlerhafter Stifte für Ablehnung der H_0–Hypothese:*
Man will die Aussage des Herstellers prüfen, dass höchstens $2\,\%$ der hergestellten Stifte fehlerhaft sind, man nimmt also an, dass die Ausschussquote größer als $2\,\%$ ist, also $p_1 > 0{,}02$. Es handelt sich also um einen rechtsseitigen Test mit dem Signifikanzniveau $5\,\%$:
$B_{800;0,02}(X \geq k) > 0{,}05$, Lösung per GTR.

Klausuraufschrieb

a) *$P(X \leq 30)$:*
$B_{800;0,05}(X \leq 30) \overset{GTR}{\approx} 0{,}0571$
Wahrscheinlichkeit für um weniger als 10 abweichenden Erwartungswert:
$\mu = n \cdot p = 800 \cdot 0{,}05 = 40$
$B_{800;0,05}(30 < X < 50) = B_{800;0,05}(X \leq 49) - B_{800;0,05}(X \leq 30) \overset{GTR}{\approx} 0{,}8776$

b) *Anzahl fehlerhafter Stifte für Ablehnung der H_0–Hypothese:*
H_0: $p_0 = 0{,}02$; H_1: $p_1 > 0{,}02$
$\alpha = 0{,}05$
Rechtsseitiger Signifikanztest.
$B_{800;0,02}(X \geq k) > 0{,}95 \Longrightarrow$
$1 - B_{800;0,02}(X \leq k - 1) < 0{,}05$
$A[0; 1; 2; \dots 23]$; $\overline{A}[24; 25; 26; \dots 800]$
Bei mehr als 23 fehlerhaften Stiften wird die H_0–Hypothese abgelehnt. Der Fehler der 1. Art beträgt dabei etwa $3{,}5\,\%$.



zu b)
Y1: 1-binomcdf(800,.02,X-1)