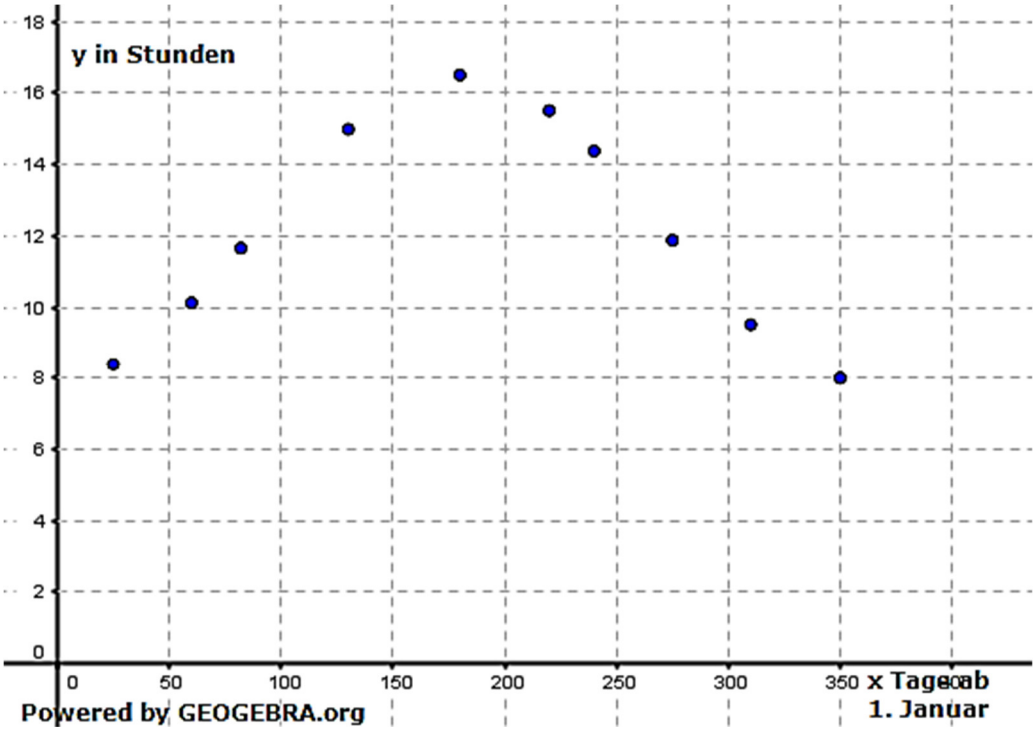
Aufgabe A1

2. Im Verlaufe eines Jahres ändert sich aufgrund der geneigten Erdachse die astronomische Sonnenscheindauer, d. h., die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang.
In unseren Breiten ist die Sonne am 21. Juni mit ca. 16,5 Stunden am längsten und am 21. Dezember mit ca. 8 Stunden am kürzesten zu sehen.



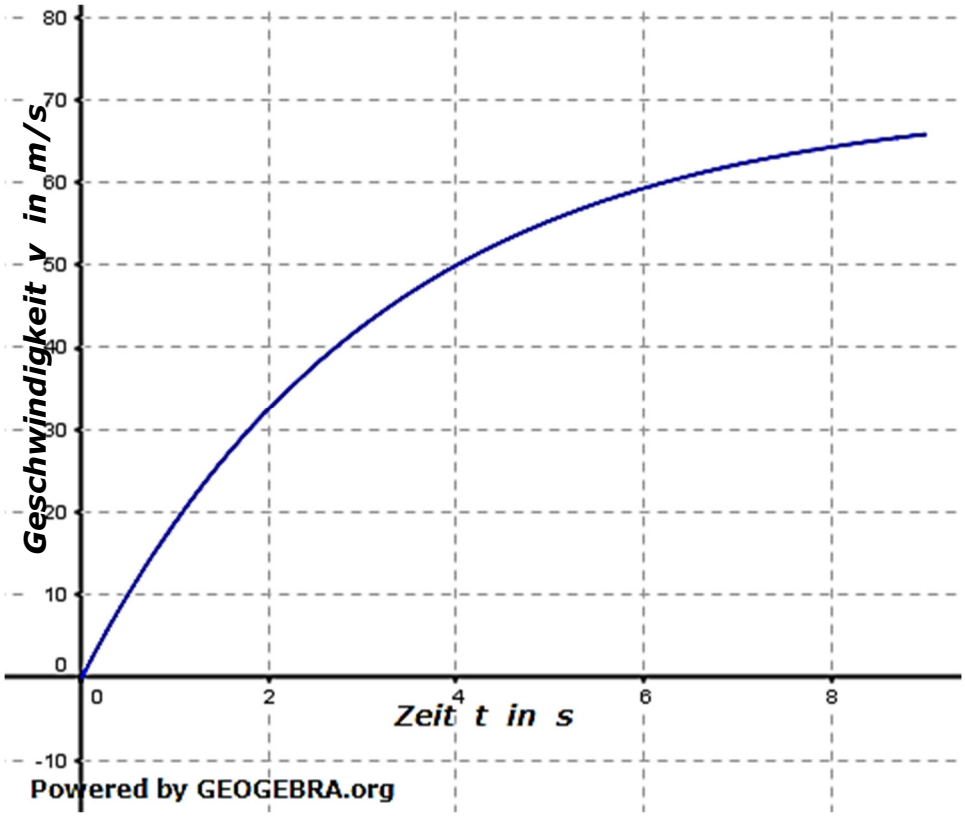
2.1 Die Messergebnisse sollen durch eine trigonometrische Funktion modelliert werden. **6P**
Geben Sie einen geeigneten Funktionsterm an.

2.2 Tina und Tom haben jeweils einen Funktionsterm bestimmt. **4P**
Tina hat die Daten durch eine quadratische Regression mit dem Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0{,}8745$, Tom durch eine Regression 4. Grades mit dem Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0{,}9784$ angenähert.

Bewerten Sie die Güte der beiden Näherungsfunktionen.
Kann man mithilfe Toms Näherungsfunktion die astronomische Sonnenscheindauer im nächsten Jahr vorhersagen?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe A2

3. Bei einem Beschleunigungsrennen (Drag Race) versuchen die Teilnehmer mit ihren Rennwagen eine kurvenfreie Strecke in möglichst kurzer Zeit zurückzulegen.
Der Bordcomputer des Fahrzeugs eines Teilnehmers nahm den in der Abbildung dargestellten Geschwindigkeitsverlauf auf.



Dieser Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Zeit lässt sich durch die Funktion v mit

$$v(t) = -70e^{-0{,}313t} + 70;\ \ 0 \leq t \leq 8{,}75$$

modellieren.
Verwenden Sie für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben dieses Modell.

3.1 Nach wieviel Sekunden hat das Fahrzeug eine Geschwindigkeit von $100\ km/h$ erreicht? **4P**

3.2 Nach $8{,}75$ Sekunden fährt das Fahrzeug durch das Ziel. **6P**
Ermitteln Sie die Durchschnittgeschwindigkeit des Fahrzeuges.
Welche Länge hat die Rennstrecke?

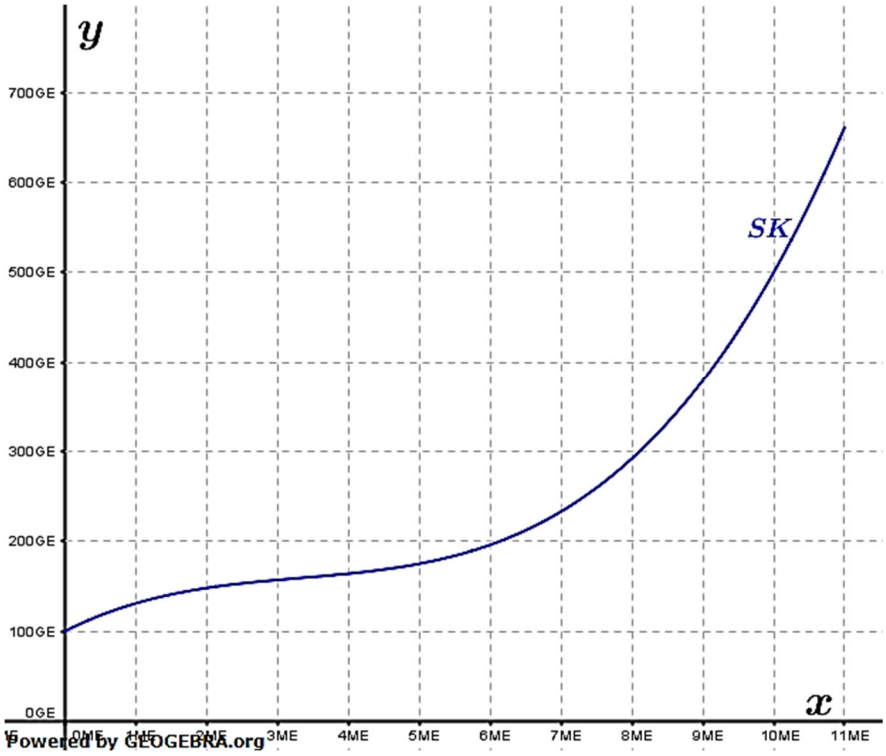
Aufgabe A3

4. Die Gesamtkosten eines Unternehmens bei der Herstellung einer Produktion werden durch die Funktion K mit

$$K(x) = x^3 - 10x^2 + 40x + 100;\ \ x \in [0; 11]$$

beschrieben. Dabei bezeichnen x die Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ die Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE). Der Verkaufspreis beträgt $50\,GE$. Der Erlös ist das Produkt aus Verkaufspreis und Verkaufsmenge und der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Gesamtkosten.

Die Grafik zeigt das Schaubild SK der Funktion K.



4.1 Ermitteln Sie die Funktionsterme der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G. **4P**
Prüfen Sie, ob eine größere Produktionsmenge stets auch mit höheren Gesamtkosten verbunden ist.

4.2 Von G sind die beiden Nullstellen $x_1 = \sqrt{10}$ und $x_2 = 10$ bekannt. **4P**
Skizzieren Sie das Schaubild von G für $x \in [0; 11]$.

Die Gewinnzone ist der Bereich, in dem die Produktionsmenge liegen muss, damit das Unternehmen keinen Verlust macht.
Bestimmen Sie die Gewinnzone.

4.3 Die Unternehmensleitung möchte wissen, für welche Produktions-Mengen die Kosten am geringsten ansteigen. Berechnen Sie diese Produktionsmenge. **2P**

Aufgabe A4

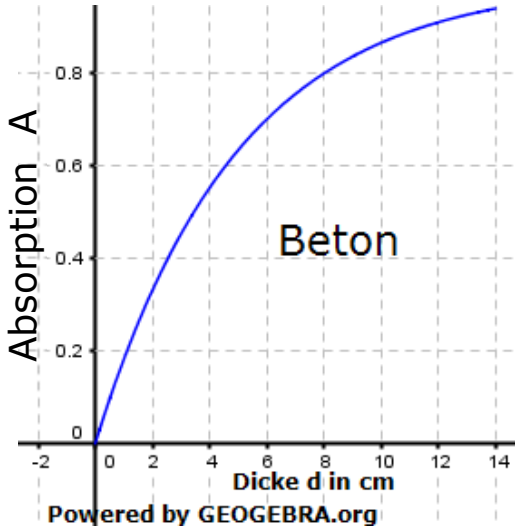
2. Die von einem Röntgengerät ausgehende Strahlenbelastung kann durch eine Abschirmung reduziert werden.
Die Absorption A gibt an, welcher Anteil der Strahlung von der Abschirmung zurückgehalten wird. Zum Beispiel bedeutet $A = 0{,}9$, dass $90\,\%$ der Strahlung absorbiert werden.

Der Zusammenhang zwischen der Absorption und der Dicke d (in cm) des abschirmenden Materials wird näherungsweise beschrieben durch

$$A(d) = 1 - e^{-k \cdot d}$$

Hierbei ist k (in $\frac{1}{cm}$) eine Materialkonstante.

2.1 Für Abschirmungen durch Betonwände wurde der im folgenden Bild dargestellte Zusammenhang ermittelt. **6P**



Bestimmen Sie die Materialkonstante k für Beton mithilfe dieses Diagramms. Wie dick muss eine Betonwand sein, damit $99\,\%$ der Strahlung absorbiert werden?

2.2 Für Aluminium hat k den Wert $0{,}15$ und für Blei hat k den Wert $1{,}62$. **4P**
Zur Abschirmung der von einem Röntgengerät ausgehenden Strahlung wird eine $51\,kg$ schwere Bleiplatte der Dicke $5\,cm$ verwendet. Eine Platte aus Aluminium mit den gleichen Abmessungen wiegt $12{,}13$ kg. Der Kilogrammpreis für Blei liegt bei ca. $1{,}60\,€$, der für Aluminium bei ca. $1{,}50\,€$.

Zeigen Sie, dass eine ebenso gut absorbierende Abschirmung aus Aluminium wesentlich teurer ist.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A5

3. Bei einer „Holländischen Auktion" sinkt der Preis des Verkaufsobjektes mit zunehmender Angebotsdauer.
Ein Händler möchte diese Art der Auktion testen. Er bietet hierzu über ein Internetauktionshaus eine Holzgiraffe zum Verkauf an und wählt die folgende Strategie:

- Der Startpreis wird auf das Doppelte des Preises, der gerade noch kostendeckend ist, festgelegt.
- Der Preis wird an jedem Auktionstag um $4\,\%$, bezogen auf den Preis des Vortages gesenkt.

Die Gesamtkosten (Auktionsgebühren und Kosten für den Verkauf der Giraffe) betragen 30 Euro.

3.1 Der Händler möchte im Voraus den aktuellen Preis der Giraffe Für jeden Auktionstag berechnen. Der Händler stellt hierzu einen Funktionsterm für die Preisfunktion p auf: **6P**

$$p(t) = 60 - 2{,}4 \cdot t$$

wobei $t \in \mathbb{N}$ die Zeit in Tagen nach Beginn der Auktion ist.
Ein Freund des Händlers behauptet, dass der Funktionsterm wie folgt lauten muss:

$$p(t) = 60 \cdot e^{ln(0{,}96) \cdot t}.$$

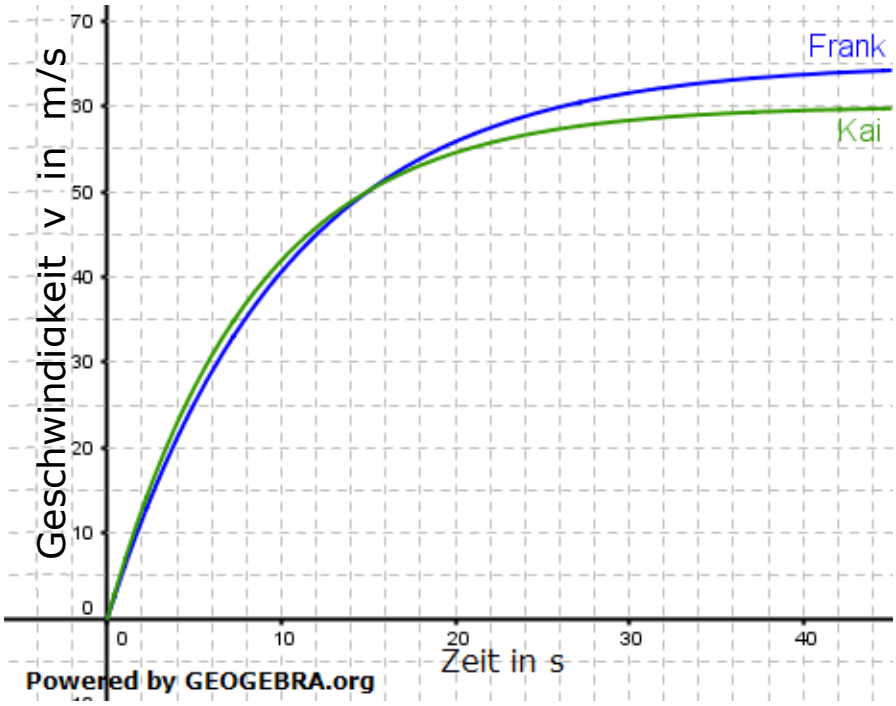
Begründen Sie, mit welchem der beiden Funktionsterme der Auktionspreis richtig berechnet wird.

Nach wie vielen Tagen muss der Händler die Giraffe spätestens verkauft haben, damit er mit dem Verkauf keinen Verlust erleidet?

3.2 Auf welchen Wert muss der Prozentsatz der täglichen Preis-Anpassung gesenkt werden, damit der Händler erst ab dem $50.$ Auktionstag Verlust macht? **4P**
Hinweis: Beginn der Auktion bei $t = 0$.

Aufgabe A6

4. Kai und Frank liefern sich mit einem Sportwagen ein Rennen. Hierzu fahren Sie eine $2\,km$ lange Rennstrecke. Der Geschwindigkeitsverlauf beider Fahrzeuge ist innerhalb der ersten 42 Sekunden in der Abbildung dargestellt.



4.1 Die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung. **4P**

Bestimmen Sie näherungsweise mithilfe der Abbildung:
(1) Die maximale Beschleunigung, die Kai erfährt.
(2) Den Zeitpunkt, zu dem Frank und Kai gleich stark beschleunigen.

4.2 Die Funktion v mit **6P**
$v(t) = -65 \cdot e^{-0{,}098t} + 65;\ \ 0 \leq\ t \leq 42$
Gibt näherungsweise den in der Abbildung dargestellten Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und der Zeit t von Franks Wagen wieder.
Hierbei werden $v(t)$ in Metern pro Sekunde $\left(\frac{m}{s}\right)$ und t in s angegeben.

Die Geschwindigkeit ist die momentane Änderungsrate der zurückgelegten Wegstrecke. Welche Wegstrecke hat Frank nach 40 Sekunden Fahrt zurückgelegt?

Kai hat nach 40 Sekunden $1941\,m$ Wegstrecke zurückgelegt. Begründen Sie, warum Frank sicher als Sieger aus dem Rennen hervorgehen wird.

Aufgabe A7

2. Bei einem chemischen Experiment wird Wasserstoff hergestellt und in einem Standzylinder aufgefangen.
Bei einer ersten Messung ergeben sich die folgenden Daten für die Zuwachsrate des Wasserstoffvolumens:

Zeit in min	1	2	3	4	5	6
Zuwachsrate in $\frac{ml}{min}$	13	10	6	4	3	2

2.1 Stelle die Daten in einem Koordinatensystem dar. **5P**
Wähle und begründe einen geeigneten Funktionstyp und bestimme eine Näherungsfunktion.

2.2 Die momentane Änderungsrate des Wasserstoffvolumens (in $\frac{ml}{min}$) wird durch die Funktion r beschrieben: $r(t) = 19e^{-0,343t}$; $t > 0$.

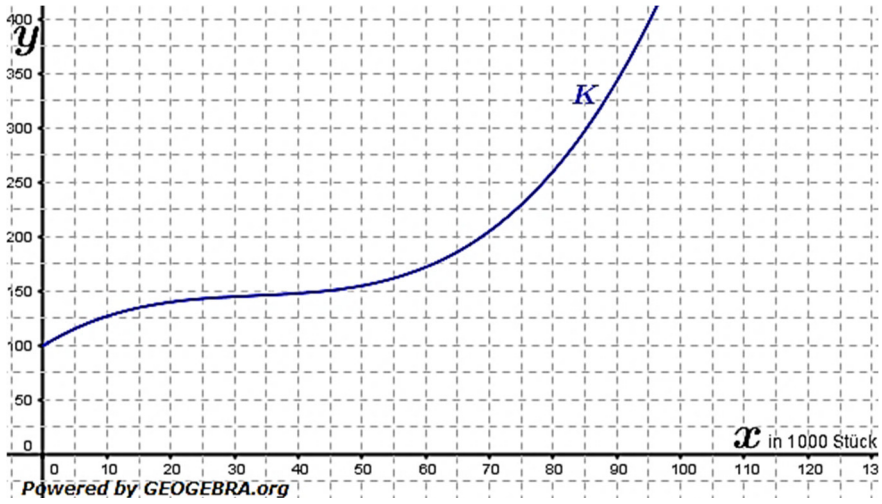
2.2.1 Zu welchem Zeitpunkt liegt nur noch die halbe momentane Änderungsrate wie zu Beginn vor? **2P**

2.2.2 Wie viele Minuten dauert es, bis $50\,ml$ Wasserstoff entstanden sind? **3P**

Aufgabe A8

3. Die Firma Fischer stellt speziell für die NASA entwickelte, weltraumtaugliche Kugelschreiber her.
Die Produktionsgrenze der Firma liegt bei 100000 Kugelschreibern.
Es wird davon ausgegangen, dass alle produzierten Kugelschreiber auch verkauft werden.
Die Firma Fischer ist der alleinige Anbieter von weltraumtauglichen Kugelschreibern. Für den Erlös $E(x)$ und die Gesamtkosten $K(x)$ in US-Dollar gilt:
$E(x) = -100x^2 + 10000x$ und $K(x) = x^3 - 100x^2 + 3600x + 100000$.
Dabei ist x die Menge der Kugelschreiber in 1000 Stück.

3.1 Das Schaubild K der Gesamtkostenfunktion ist in das Koordinaten-System eingezeichnet. Zeichne ebenfalls das Schaubild der Erlös-Funktion E ein. **3P**



Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Gesamtkosten.
Eine Verkaufsmenge, bei welcher die Firma Fischer Gewinn erzielt, liegt innerhalb der Gewinnzone. Geben Sie die Gewinnzone mithilfe des Koordinatensystems näherungsweise an.

3.2 Bestimme die Stückzahl, bei welcher der Gewinn maximal ist. **5P**
Gib den maximalen Gewinn in US-Dollar an.

3.3 Berechne den Preis, den die Firma Fischer bei einem Absatz von 4000 Stück für einen Kugelschreiber verlangen müsste, um keinen Verlust zu machen. **2P**

Aufgabe A9

4. In einem Gehege wird der Kaninchenbestand über einen längeren Zeitraum beobachtet. Die Auswertung dieser Beobachtung hat modellhaft folgende Bestandsfunktion ergeben:

$$k(t) = 1000 \cdot (1 - 0{,}85e^{-0{,}0153t});\ t \geq\ 0.$$

Die Zeit t wird in Monaten gemessen und $k(t)$ gibt den Bestand der Kaninchen zum Zeitpunkt t an.

4.1 Wann hat sich der Kaninchenbestand im Gehege, der zu Beginn der Beobachtung vorlag, verdreifacht? **5P**
Wie wird im Funktionsterm berücksichtigt, dass der Bestand nicht beliebig groß wird?

4.2 Bestimme die momentane Änderungsrate des Kaninchenbestandes in Abhängigkeit von der Zeit t. **3P**
Wann ist dies Änderungsrate am größten?

4.3 Berechne die durchschnittliche Änderungsrate in den ersten fünf Monaten. **2P**

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de