

Aufgabe A10



2. Im Jahr 1986 gab es in Tschernobyl ein Reaktorunglück, bei dem die radioaktiven Isotope Cäsium-137 und Plutonium-241 freigesetzt wurden. Deren Radioaktivität ist noch immer messbar. Im Folgenden entspricht der Zeitpunkt $t = 0$ dem Jahr 1986, wobei t in Jahren gemessen wird.

2.1 Die folgende Tabelle zeigt die geschätzten Werte für die nicht Zerfallene Menge an Cäsium-137 (in Gramm), welche auf der Fläche Deutschlands insgesamt zu den angegebenen Zeitpunkten vorhanden waren. **2P**

Jahr	1986	1991	1996	2006
Cäsium-137	230,00	204,91	182,55	144,89

Der Zerfall des vorhandenen Cäsiums-137 soll durch eine Funktion m mit $m(t) = a \cdot b^t$; $t \geq 0$ beschrieben werden.

Bestimme passende Werte für a und b .

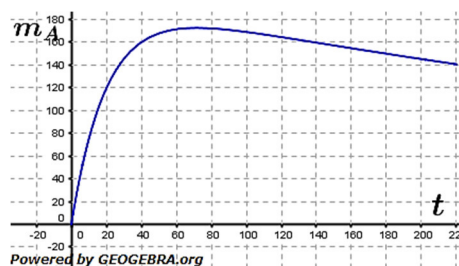
2.2 Die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge Cäsium-137 in Gramm wird durch das Modell m_c mit $m_c(t) = 230e^{-0,023t}$; $t \geq 0$ beschrieben. **4P**

Wie viel Prozent des ursprünglich vorhandenen Cäsiums-137 sind im Jahr 2018 noch vorhanden?

In welchem Jahr wird nur noch 1 % der ursprünglichen Menge an Cäsium-137 vorhanden sein?

2.3 Plutonium-241 zerfällt zu Americium-241, welches selbst auch radioaktiv ist und daher weiter zerfällt. Die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge Americium-241 in Milligramm wird durch das Modell m_A mit $m_A(t) = 200(1 - e^{-0,048t}) \cdot e^{-0,0016t}$; $t \geq 0$ angenähert. Die Abbildung zeigt das zugehörige Schaubild.

2.3.1 Begründe mithilfe der Abbildung, dass Plutonium-241 schneller zerfällt als Americium-241. **2P**



2.3.2 In welchem Jahr ist die Menge des Vorhanden Americums-241 am größten? Bestimme den Zeitpunkt auf ein halbes Jahr genau. (Auf einen Nachweis wird verzichtet). **2P**

Aufgabe A11

3. Im Einkommensteuerbescheid wird unter anderem der Durchschnittsteuersatz angegeben. Eine Geldeinheit (GE) entspricht im Folgenden 1000 EUR.

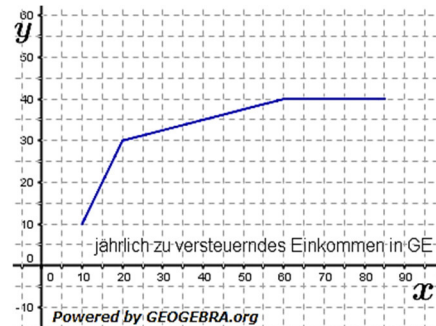
Der Durchschnittsteuersatz kann aus dem Grenzsteuersatz, der im Schaubild dargestellt ist, berechnet werden.

Beispiel:

Bei einem Jahreseinkommen von 15000 EUR (15 GE) sind die ersten 10000 EUR (10 GE) steuerfrei.

Die restlichen 5000 EUR (5 GE) werden zwischen 10 % und 20 % besteuert, also im Mittel mit 5 %.

Die Steuer beträgt demnach 750 EUR, und der Durchschnittsteuersatz ist 750 geteilt durch 15000, also 5 %.



Im Folgenden sollen die Informationen für Einkommen bis 85 GE aus dem Schaubild genutzt werden.

3.1 Zeige, dass bei einem Jahreseinkommen von 40000 EUR Steuern in Höhe von 8500 EUR anfallen. **3P**
Bestimme den zugehörigen Durchschnittsteuersatz.

3.2 Kann der Durchschnittsteuersatz für ein Einkommen 40 % sein? **2P**
Begründe.

3.3 Für $60 < x < 85$ kann der Durchschnittsteuersatz S (in %) in Abhängigkeit des Jahreseinkommens x (in GE) folgendermaßen ermittelt werden: **5P**

$$S(x) = \frac{1600 + 40(x - 60)}{x}$$

Berechne, für welches Einkommen der Durchschnittsteuersatz 28 % ist. Erläutere mithilfe des obigen Schaubilds, wie sich der Term für S ergibt.

Aufgabe A12

4. Als Lärmschutzwälle werden zwei Erdwälle der Gesamtbreite 24 m errichtet. Der Verlauf des Querschnitts wird modelliert durch das Schaubild der Funktion g mit

$$g(x) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2; \quad 0 \leq x \leq 24.$$

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

4.1 Zeichne das zugehörige Schaubild in ein geeignetes Koordinatensystem. **3P**

4.2 Die beiden Erdwälle werden auf eine Länge von 50 m geplant. Berechne die hierfür notwendige Erdmenge in Kubikmetern. **4P**

4.3 Überprüfe die Aussage:
Die Steigung des Erdwalls beträgt höchstens 100 %. **1P**

Anwendungsorientierte Analysis Musteraufgaben (mit Hilfsmittel)

- 4.4 Der Verlauf des Querschnitts des linken Walls lässt sich näherungsweise auch durch eine Funktion p mit **2P**

$$p(x) = kx^2(x - 12)^2$$

beschreiben.
Bestimme k .

Aufgabe A13

2. Bei den olympischen Sommerspielen 2008 in Peking legte der Jamaikaner Usain Bolt die 100 Meter (m) in der damaligen Weltrekordzeit von fabelhaften 9,69 Sekunden (s) zurück. Dabei begann Bolt bereits nach 80 m zu jubeln und verringerte somit vorzeitig seine Geschwindigkeit. Analysiert man seinen Lauf auf jeweils 10 m langen Abschnitten, ergeben sich die folgenden Daten:

d	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
t	0	1,85	2,87	3,78	4,65	5,50	6,32	7,14	7,96	8,79	9,69
\bar{v}	5,41	9,80	10,99	11,49	11,76	12,19	12,19	12,19	12,05	11,11	

In der Tabelle bedeuten:

- d die zurückgelegte Distanz in m
- t die Zeit in s
- \bar{v} die Durchschnittsgeschwindigkeit im jeweiligen 10-m-Intervall in $\frac{m}{s}$.

Zum Beispiel ist $5,41 \frac{m}{s}$ die Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v} auf den ersten 10 Metern.

- 2.1 Wie lange benötigte Bolt für die letzten 50 m des Laufs? **5P**
Kann ein Mensch mit einer höheren Geschwindigkeit als 40 km/h rennen?
Welche Zeit hätte Bolt erreicht, wenn er in diesem Lauf die maximale Durchschnittsgeschwindigkeit aus der Tabelle bis zum Ende des Laufs beibehalten hätte?
- 2.2 Die Funktion v mit **2P**
 $v(t) = 0,0382t^3 - 0,8158t^2 + 5,4828t + 0,4546$; $t \in [0; 9,69]$
modelliert die Momentangeschwindigkeit v in $\frac{m}{s}$ in Abhängigkeit von der Laufzeit t in s .
Zeige, dass Bolt nach diesem Modell zwischen $t = 5,4 s$ und $t = 5,5 s$ die maximale Geschwindigkeit erreichte.
- 2.3 Formuliere für Bolts Lauf eine passende Frage, deren Antwort die **3P**
Lösung der Gleichung $\int_3^{3+z} v(t) dt = 50$ für $z > 0$ ist.

Aufgabe A14

3. In einem Bootsverleih kann man sich Boote verschiedenen Typs ausleihen. Die entsprechenden Preise sind in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet.

Bootstyp	Preis je Stunde
Motorboot	35 €
Elektroboot	25 €
Tretboot	10 €

- 3.1 An einem heißen Sommertag sind alle 48 Boote gleichzeitig ausgeliehen. Die Einnahmen nach einer Stunde betragen 980 €. Die Anzahl der Tretboote ist doppelt so groß wie die Anzahl der Motorboote. Wie viele Motor-, Elektro- und Tretboote besitzt der Bootsverleih? **5P**

- 3.2 Für die letzte Stunde des Tages fragt sich Jutta, wie viele Motorboote mindestens unterwegs sind. Dazu stellt sie das nachfolgende LGS auf:
 $x + y + z = 25$
 $35x + 25y + 10z = 525$
 Und formt dieses auf die Dreiecksform um:
 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1,5 & -10 \\ 0 & 1 & 2,5 & 35 \end{array} \right)$
 Welche Information hat Jutta?
 Beantworte Juttas Frage. **5P**

Aufgabe A15

4. Ein Kondensator ist ein Bauteil, das elektrische Ladung speichert. Der Ladevorgang eines Kondensators wird im Labor untersucht. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt der Aufladevorgang. Die Stärke des elektrischen Stroms, der beim Aufladen fließt, wird gemessen. Die Messwerte sind in folgender Tabelle zusammengefasst.

t in Sekunden (s)	1,0	2,4	4,8	7,2	9,6
I in Milliampere (mA)	9,0	6,0	3,0	1,5	0,75

Der Zusammenhang zwischen der Zeit t und der Stromstärke I soll durch eine Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot e^{kt}$ beschrieben werden.

- 4.1 Bestimme einen Funktionsterm. **2P**
- 4.2 Wann ist die momentane Änderungsrate der Stromstärke ebenso groß wie ihre durchschnittliche Änderungsrate im Zeitraum von 1,0 s bis 2,4 s? **2P**

Anwendungsorientierte Analysis Musteraufgaben (mit Hilfsmittel)

- 4.3 Die Stromstärke I ist die momentane Änderungsrate der Ladung Q . Die Ladung wird in Milliampere-Sekunden (mAs) gemessen.
- 4.3.1 Bestimme die Ladung, die in den ersten 18 Sekunden auf dem Kondensator gespeichert wird. **4P**
- 4.3.2 Nach welcher Zeit trägt der Kondensator 60 % dieser Ladung? Gib einen zugehörigen Rechenansatz an. **2P**

Aufgabe A16

2. Die Gesamtkosten eines Unternehmens bei der Herstellung eines Produktes werden durch die Funktion K mit
- $$K(x) = x^3 - 10x^2 + 100; x \in [0; 11]$$
- beschrieben.
 Dabei bezeichnen x die Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ die Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE).
- 2.1 Prüfe, ob eine größere Produktionsmenge stets auch mit höheren Gesamtkosten verbunden ist. **2P**
- 2.2 Der Verkaufspreis beträgt 50 GE. Der Erlös ist das Produkt aus Verkaufspreis und Verkaufsmenge. Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Gesamtkosten. Berechne den maximalen Gewinn. **5P**
- 2.3 Um die Produktionsmenge zu ermitteln, bei welcher die minimalen Stückkosten anfallen, schlägt Tom vor, das Minimum der Ableitungsfunktion zu ermitteln. Bewerte diesen Vorschlag und mache gegebenenfalls einen begründeten Gegenvorschlag. **3P**

Aufgabe A17

3. In einem chemischen Experiment wird die Reaktionsgeschwindigkeit bei der Reaktion von Zink mit Salzsäure betrachtet. Man gibt Zink in verdünnte Salzsäure. Dabei entstehen unter anderem Zinkionen und Wasserstoff. Die Konzentration der Zinkionen in Abhängigkeit von der Zeit wird näherungsweise durch die Funktion c beschrieben:
- $$c(t) = 0,5(1 - e^{-0,343t}); t \geq 0.$$
- t ist hierbei die Zeit in Minuten, $c(t)$ ist die Konzentration der Zinkionen in Mol pro Liter.
 Die Reaktionsgeschwindigkeit (gemessen in $\frac{\text{mol}}{\text{l}\cdot\text{min}}$) ist die momentane Änderungsrate von c .
- 3.1 Zeichne das Schaubild von c für die ersten 12 Minuten. Welchem Wert nähert sich die Konzentration im Laufe der Zeit an? **3P**
- 3.2 Gib die maximale Reaktionsgeschwindigkeit an. Die Messung wird abgebrochen, wenn die Reaktionsgeschwindigkeit unter 0,002 gefallen ist. Nach wie vielen Minuten ist dies der Fall? **4P**

Anwendungsorientierte Analysis Musteraufgaben (mit Hilfsmittel)

- 3.3 Bei dem Experiment wird der entstehende Wasserstoff in einem Standzylinder aufgefangen. Bei einer ersten Messung ergeben sich die folgenden Daten für die Zuwachsrate des Wasserstoffvolumens: **3P**

Zeit in min	1	2	3	4	5	6
Zuwachsrate in $\frac{ml}{min}$	13	10	6	4	3	2

Bestimme eine geeignete Näherungsfunktion für die Zuwachsrate des Wasserstoffvolumens in Abhängigkeit von der Zeit und bewerte dessen Güte.

Aufgabe A18

4. Nach einem Unfall auf einer Autobahn wird die Überholspur gesperrt. Der Verkehr rollt auf der anderen Fahrspur mit verminderter Geschwindigkeit an der Unfallstelle vorbei. Infolge des hohen Verkehrsaufkommens bildet sich ein Stau mit zunächst zunehmender Länge.



Nachdem die Unfallstelle geräumt ist, löst sich der Stau allmählich wieder auf. Die Anzahl der Fahrzeuge, die pro Minute in den Staubereich hineinfahren, ist q_1 . Die Anzahl der pro Minute aus dem Staubereich herausfahrenden Fahrzeuge ist q_2 . Die folgende Tabelle zeigt den Fahrzeugfluss $q = q_1 - q_2$ in Abhängigkeit von der Zeit t .

In einer vereinfachten Betrachtung gibt q die Zahl der Fahrzeuge pro Minute an, um die sich die Staulänge verändert.

t (Minuten)	0	5	10	15	20	30	40	50	60
q (Anzahl der Fahrzeuge pro Minute)	13,5	9,6	5	0	-5	-13,5	-17,5	-14	0

- 4.1 Stelle q in Abhängigkeit von t grafisch dar. Bestimme den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge ihr Maximum erreicht, und den Zeitpunkt, zu dem sich der Stau am schnellsten abbaut. Skizziere in einem Koordinatensystem die Anzahl der Fahrzeuge im Stau in Abhängigkeit von der Messzeit. Erläutere deine Vorgehensweise. **8P**
- 4.2 Die zeitliche Entwicklung des Fahrzeugflusses während der Messzeit kann durch folgende Funktion q beschrieben werden: **2P**
 $q(t) = a(t + 30)((t - b)(t - c))$ mit $t \in [0; 60]$.
 Bestimme die Konstanten a , b und c anhand der obigen Tabelle.