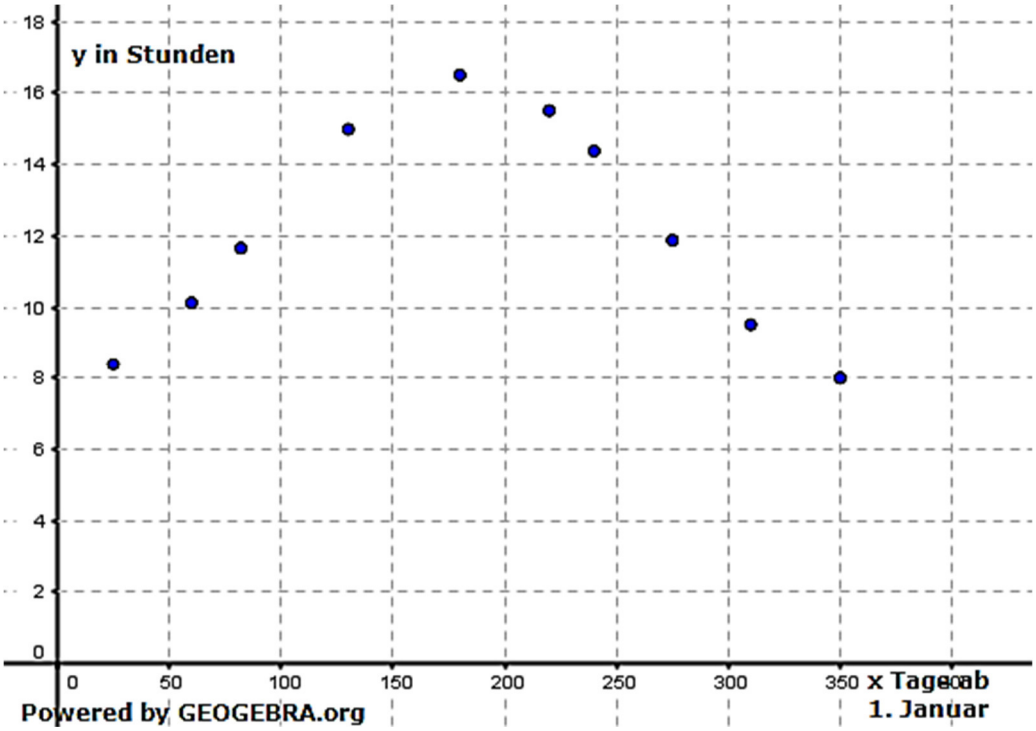
Aufgabe A1

2. Im Verlaufe eines Jahres ändert sich aufgrund der geneigten Erdachse die astronomische Sonnenscheindauer, d. h., die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang.
In unseren Breiten ist die Sonne am 21. Juni mit ca. 16,5 Stunden am längsten und am 21. Dezember mit ca. 8 Stunden am kürzesten zu sehen.



2.1 Die Messergebnisse sollen durch eine trigonometrische Funktion modelliert werden. **6P**
Geben Sie einen geeigneten Funktionsterm an.

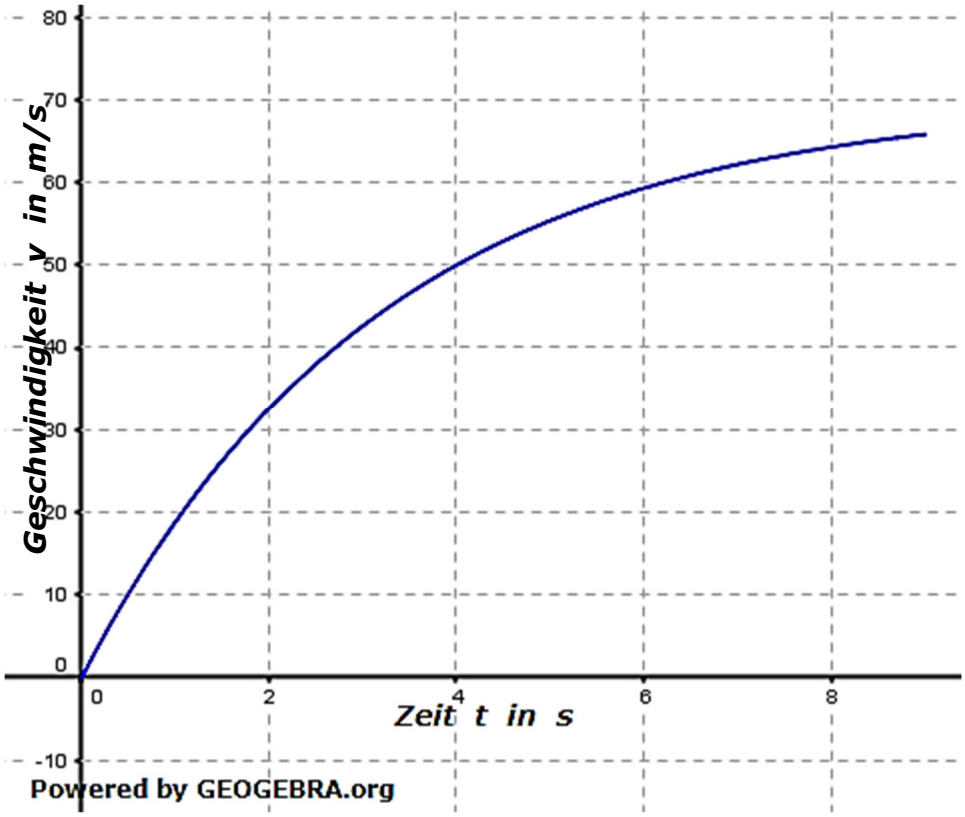
2.2 Tina und Tom haben jeweils einen Funktionsterm bestimmt. **4P**
Tina hat die Daten durch eine quadratische Regression mit dem Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0{,}8745$, Tom durch eine Regression 4. Grades mit dem Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0{,}9784$ angenähert.

Bewerten Sie die Güte der beiden Näherungsfunktionen.
Kann man mithilfe Toms Näherungsfunktion die astronomische Sonnenscheindauer im nächsten Jahr vorhersagen?
Begründen Sie Ihre Antwort.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A2

3. Bei einem Beschleunigungsrennen (Drag Race) versuchen die Teilnehmer mit ihren Rennwagen eine kurvenfreie Strecke in möglichst kurzer Zeit zurückzulegen.
Der Bordcomputer des Fahrzeugs eines Teilnehmers nahm den in der Abbildung dargestellten Geschwindigkeitsverlauf auf.



Dieser Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Zeit lässt sich durch die Funktion v mit

$$v(t) = -70e^{-0{,}313t} + 70;\ \ 0 \leq t \leq 8{,}75$$

modellieren.
Verwenden Sie für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben dieses Modell.

3.1 Nach wieviel Sekunden hat das Fahrzeug eine Geschwindigkeit von $100\ km/h$ erreicht? **4P**

3.2 Nach $8{,}75$ Sekunden fährt das Fahrzeug durch das Ziel. **6P**
Ermitteln Sie die Durchschnittgeschwindigkeit des Fahrzeuges.
Welche Länge hat die Rennstrecke?

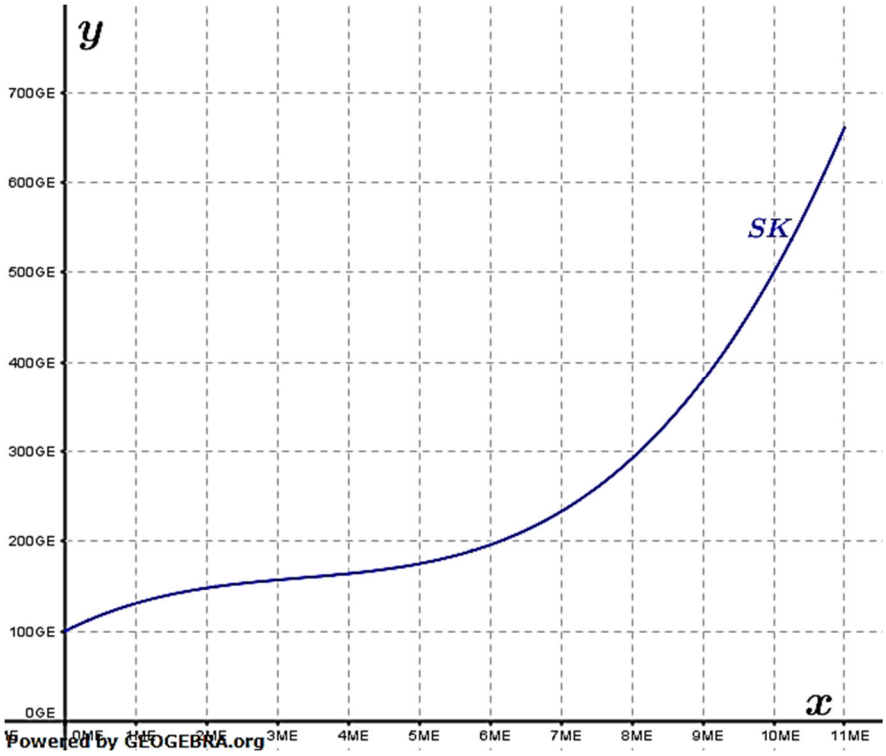
Aufgabe A3

4. Die Gesamtkosten eines Unternehmens bei der Herstellung einer Produktion werden durch die Funktion K mit

$$K(x) = x^3 - 10x^2 + 40x + 100;\ \ x \in [0; 11]$$

beschrieben. Dabei bezeichnen x die Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ die Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE). Der Verkaufspreis beträgt $50\,GE$. Der Erlös ist das Produkt aus Verkaufspreis und Verkaufsmenge und der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Gesamtkosten.

Die Grafik zeigt das Schaubild SK der Funktion K.



4.1 Ermitteln Sie die Funktionsterme der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G. **4P**
Prüfen Sie, ob eine größere Produktionsmenge stets auch mit höheren Gesamtkosten verbunden ist.

4.2 Von G sind die beiden Nullstellen $x_1 = \sqrt{10}$ und $x_2 = 10$ bekannt. **4P**
Skizzieren Sie das Schaubild von G für $x \in [0; 11]$.

Die Gewinnzone ist der Bereich, in dem die Produktionsmenge liegen muss, damit das Unternehmen keinen Verlust macht.
Bestimmen Sie die Gewinnzone.

4.3 Die Unternehmensleitung möchte wissen, für welche Produktions-Mengen die Kosten am geringsten ansteigen. Berechnen Sie diese Produktionsmenge. **2P**

Aufgabe A4

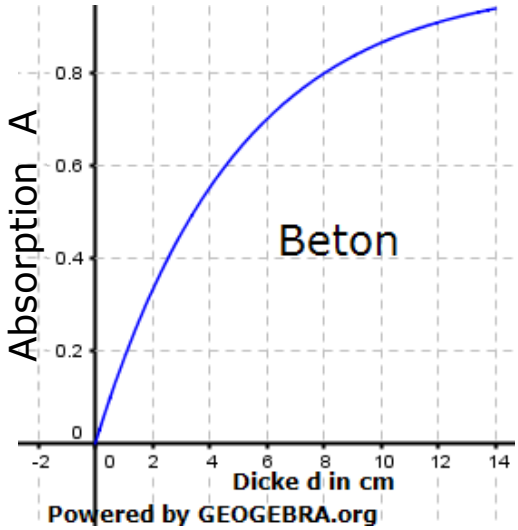
2. Die von einem Röntgengerät ausgehende Strahlenbelastung kann durch eine Abschirmung reduziert werden.
Die Absorption A gibt an, welcher Anteil der Strahlung von der Abschirmung zurückgehalten wird. Zum Beispiel bedeutet $A = 0{,}9$, dass $90\,\%$ der Strahlung absorbiert werden.

Der Zusammenhang zwischen der Absorption und der Dicke d (in cm) des abschirmenden Materials wird näherungsweise beschrieben durch

$$A(d) = 1 - e^{-k \cdot d}$$

Hierbei ist k (in $\frac{1}{cm}$) eine Materialkonstante.

2.1 Für Abschirmungen durch Betonwände wurde der im folgenden Bild dargestellte Zusammenhang ermittelt. **6P**



Bestimmen Sie die Materialkonstante k für Beton mithilfe dieses Diagramms. Wie dick muss eine Betonwand sein, damit $99\,\%$ der Strahlung absorbiert werden?

2.2 Für Aluminium hat k den Wert $0{,}15$ und für Blei hat k den Wert $1{,}62$. **4P**
Zur Abschirmung der von einem Röntgengerät ausgehenden Strahlung wird eine $51\,kg$ schwere Bleiplatte der Dicke $5\,cm$ verwendet. Eine Platte aus Aluminium mit den gleichen Abmessungen wiegt $12{,}13$ kg. Der Kilogrammpreis für Blei liegt bei ca. $1{,}60\,€$, der für Aluminium bei ca. $1{,}50\,€$.

Zeigen Sie, dass eine ebenso gut absorbierende Abschirmung aus Aluminium wesentlich teurer ist.

Aufgabe A5

3. Bei einer „Holländischen Auktion" sinkt der Preis des Verkaufsobjektes mit zunehmender Angebotsdauer.
Ein Händler möchte diese Art der Auktion testen. Er bietet hierzu über ein Internetauktionshaus eine Holzgiraffe zum Verkauf an und wählt die folgende Strategie:

- Der Startpreis wird auf das Doppelte des Preises, der gerade noch kostendeckend ist, festgelegt.
- Der Preis wird an jedem Auktionstag um $4\,\%$, bezogen auf den Preis des Vortages gesenkt.

Die Gesamtkosten (Auktionsgebühren und Kosten für den Verkauf der Giraffe) betragen 30 Euro.

3.1 Der Händler möchte im Voraus den aktuellen Preis der Giraffe Für jeden Auktionstag berechnen. Der Händler stellt hierzu einen Funktionsterm für die Preisfunktion p auf: **6P**

$$p(t) = 60 - 2{,}4 \cdot t$$

wobei $t \in \mathbb{N}$ die Zeit in Tagen nach Beginn der Auktion ist.
Ein Freund des Händlers behauptet, dass der Funktionsterm wie folgt lauten muss:

$$p(t) = 60 \cdot e^{ln(0{,}96) \cdot t}.$$

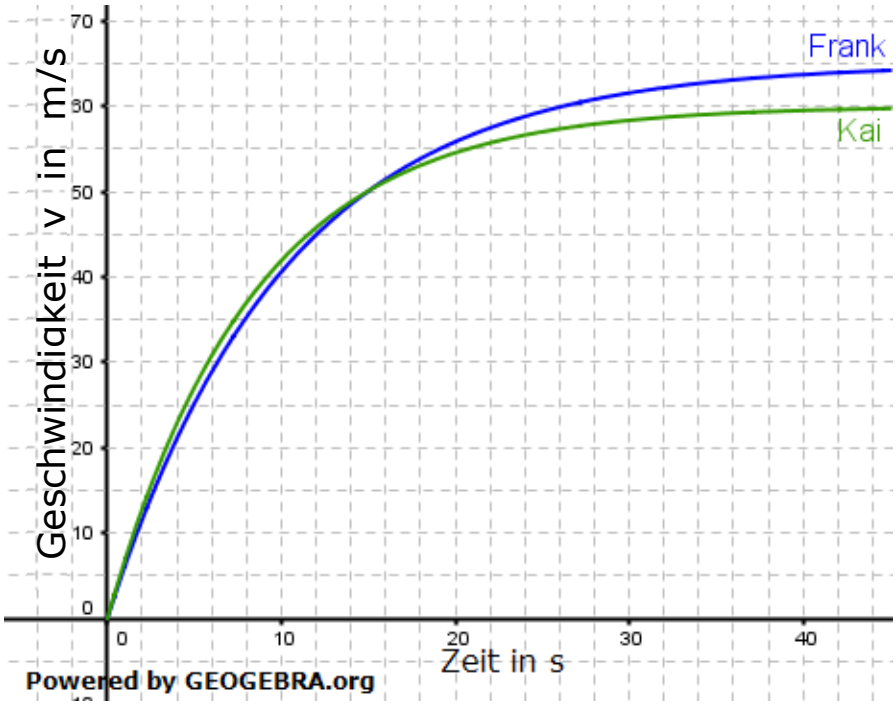
Begründen Sie, mit welchem der beiden Funktionsterme der Auktionspreis richtig berechnet wird.

Nach wie vielen Tagen muss der Händler die Giraffe spätestens verkauft haben, damit er mit dem Verkauf keinen Verlust erleidet?

3.2 Auf welchen Wert muss der Prozentsatz der täglichen Preis-Anpassung gesenkt werden, damit der Händler erst ab dem $50.$ Auktionstag Verlust macht? **4P**
Hinweis: Beginn der Auktion bei $t = 0$.

Aufgabe A6

4. Kai und Frank liefern sich mit einem Sportwagen ein Rennen. Hierzu fahren Sie eine $2\,km$ lange Rennstrecke. Der Geschwindigkeitsverlauf beider Fahrzeuge ist innerhalb der ersten 42 Sekunden in der Abbildung dargestellt.



4.1 Die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung. **4P**

Bestimmen Sie näherungsweise mithilfe der Abbildung:
(1) Die maximale Beschleunigung, die Kai erfährt.
(2) Den Zeitpunkt, zu dem Frank und Kai gleich stark beschleunigen.

4.2 Die Funktion v mit **6P**
$v(t) = -65 \cdot e^{-0{,}098t} + 65;\ \ 0 \leq\ t \leq 42$
Gibt näherungsweise den in der Abbildung dargestellten Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und der Zeit t von Franks Wagen wieder.
Hierbei werden $v(t)$ in Metern pro Sekunde $\left(\frac{m}{s}\right)$ und t in s angegeben.

Die Geschwindigkeit ist die momentane Änderungsrate der zurückgelegten Wegstrecke. Welche Wegstrecke hat Frank nach 40 Sekunden Fahrt zurückgelegt?

Kai hat nach 40 Sekunden $1941\,m$ Wegstrecke zurückgelegt. Begründen Sie, warum Frank sicher als Sieger aus dem Rennen hervorgehen wird.

Aufgabe A7

2. Bei einem chemischen Experiment wird Wasserstoff hergestellt und in einem Standzylinder aufgefangen.
Bei einer ersten Messung ergeben sich die folgenden Daten für die Zuwachsrate des Wasserstoffvolumens:

Zeit in min	1	2	3	4	5	6
Zuwachsrate in $\frac{ml}{min}$	13	10	6	4	3	2

2.1 Stelle die Daten in einem Koordinatensystem dar. **5P**
Wähle und begründe einen geeigneten Funktionstyp und bestimme eine Näherungsfunktion.

2.2 Die momentane Änderungsrate des Wasserstoffvolumens (in $\frac{ml}{min}$) wird durch die Funktion r beschrieben: $r(t) = 19e^{-0,343t}$; $t > 0$.

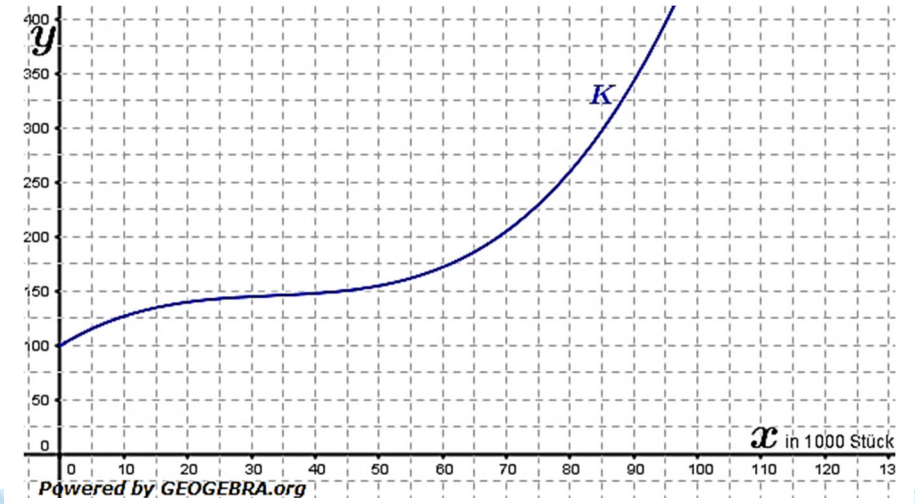
2.2.1 Zu welchem Zeitpunkt liegt nur noch die halbe momentane Änderungsrate wie zu Beginn vor? **2P**

2.2.2 Wie viele Minuten dauert es, bis $50\,ml$ Wasserstoff entstanden sind? **3P**

Aufgabe A8

3. Die Firma Fischer stellt speziell für die NASA entwickelte, weltraumtaugliche Kugelschreiber her.
Die Produktionsgrenze der Firma liegt bei 100000 Kugelschreibern.
Es wird davon ausgegangen, dass alle produzierten Kugelschreiber auch verkauft werden.
Die Firma Fischer ist der alleinige Anbieter von weltraumtauglichen Kugelschreibern. Für den Erlös $E(x)$ und die Gesamtkosten $K(x)$ in US-Dollar gilt:
$E(x) = -100x^2 + 10000x$ und $K(x) = x^3 - 100x^2 + 3600x + 100000$.
Dabei ist x die Menge der Kugelschreiber in 1000 Stück.

3.1 Das Schaubild K der Gesamtkostenfunktion ist in das Koordinaten-System eingezeichnet. Zeichne ebenfalls das Schaubild der Erlös-Funktion E ein. **3P**



Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Gesamtkosten.
Eine Verkaufsmenge, bei welcher die Firma Fischer Gewinn erzielt, liegt innerhalb der Gewinnzone. Geben Sie die Gewinnzone mithilfe des Koordinatensystems näherungsweise an.

3.2 Bestimme die Stückzahl, bei welcher der Gewinn maximal ist. **5P**
Gib den maximalen Gewinn in US-Dollar an.

3.3 Berechne den Preis, den die Firma Fischer bei einem Absatz von 4000 Stück für einen Kugelschreiber verlangen müsste, um keinen Verlust zu machen. **2P**

Aufgabe A9

4. In einem Gehege wird der Kaninchenbestand über einen längeren Zeitraum beobachtet. Die Auswertung dieser Beobachtung hat modellhaft folgende Bestandsfunktion ergeben:

$$k(t) = 1000 \cdot (1 - 0{,}85e^{-0{,}0153t});\ t \geq\ 0.$$

Die Zeit t wird in Monaten gemessen und $k(t)$ gibt den Bestand der Kaninchen zum Zeitpunkt t an.

4.1 Wann hat sich der Kaninchenbestand im Gehege, der zu Beginn der Beobachtung vorlag, verdreifacht? **5P**
Wie wird im Funktionsterm berücksichtigt, dass der Bestand nicht beliebig groß wird?

4.2 Bestimme die momentane Änderungsrate des Kaninchenbestandes in Abhängigkeit von der Zeit t. **3P**
Wann ist dies Änderungsrate am größten?

4.3 Berechne die durchschnittliche Änderungsrate in den ersten fünf Monaten. **2P**

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

2.1 Trigonometrische Funktion der Messergebnisse:

Die Messergebnisse können entweder mit einer Sinusfunktion $(f(x) = asin(b(x-c)) + d)$ oder aber auch mit einer Kosinusfunktion $(f(x) = acos(b(x-c)) + d)$dargestellt werden.

Hierzu berechnen wir zunächst Amplitude, Verschiebung in y-Richtung sowie den Periodenfaktor b, wobei die Periode die Länge eines Jahres mit 360 Tagen sei.

$a = \frac{y_{HP}-y_{TP}}{2} = \frac{16{,}5-8}{2} = 4{,}25$ $\qquad$ $d = \frac{y_{HP}+y_{TP}}{2} = \frac{16{,}5+8}{2} = 12{,}25$

$b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{365}$

Jetzt erfolgt die Überlegung, ob Sinus- oder Kosinusfunktion. Bei 365 Tagen pro Jahr kommt der 16. Juni etwa bei 172 Tage ab dem 1. Januar zu liegen. Dies ist ein Hochpunkt.

Der Beginn einer Sinuskurve wäre somit bei $172 - \frac{p}{4} = 172 - 91 = 81$. Eine Sinuskurve wäre also 81 Tage in x-Richtung nach rechts verschoben. Die Funktionsgleichung würde lauten:

$$f(x) = 4{,}25 \cdot sin\left(\frac{2\pi}{365}(x-81)\right) + 12{,}25.$$

Alternativ die Kosinusfunktion: Wegen des Hochpunktes bei 172 Tagen wäre 2eine Kosinuskurve entweder um 165 Tage in x-Richtung nach rechts verschoben, oder aber eine an der x-Achse gespiegelte Kosinuskurve um 11 Tage nach links verschoben. Die Funktionsgleichung würde lauten:

$$f(x) = 4{,}25 \cdot cos\left(\frac{2\pi}{365}(x-172)\right) + 12{,}25$$

alternativ

$$f(x) = -4{,}25 \cdot cos\left(\frac{2\pi}{365}(x+11)\right) + 12{,}25$$

2.2 Die quadratische Näherung von Tina ist zur Modellierung ungeeignet, da eine Parabel nur eine Extremstelle und keine Wendestellen besitzt. Die Funktion beschreibt die Punktemenge nicht so gut, wie man am Bestimmtheitsgrad $r^2 = 0{,}8745$ erkennen kann.

Toms Näherung beschreibt die Punktemessung besser, da das Bestimmtheitsmaß sehr nahe bei 1 liegt.

Da sich die Sonnenscheindauer als Differenz zwischen Sonnenaufgang und Sinnenuntergang ergibt, ist diese für jedes Jahr gleich.

Toms Näherungsfunktion mit der Definitionsmenge $[0; 365]$ ist für jedes Jahr geeignet.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A2

3.1 $v(t) = -70e^{-0{,}313t} + 70$

$\frac{100\frac{km}{h}}{3{,}6\frac{km\cdot s}{m\cdot h}} = 27{,}78\frac{m}{s}$

$-70e^{-0{,}313t} + 70 = 27{,}78 \quad | \quad -70;\ :(-70)$

$e^{-0{,}313t} = 0{,}60314 \quad | \quad ln$

$-0{,}313t = \ln(0{,}60314) \quad | \quad :(-0{,}313)$

$t = \frac{\ln(0{,}60314)}{-0{,}313} = 1{,}61535$

Nach etwa $1{,}6$ Sekunden hat das Fahrzeug eine Geschwindigkeit von $100\ km/h$ erreicht.

3.2 $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{8{,}75}\int_0^{8{,}75}(-70e^{-0{,}313t} + 70)\,dt = \frac{1}{8{,}75}\left[\frac{-70e^{-0{,}313t}}{-0{,}313} + 70t\right]_0^{8{,}75}$

$= \frac{1}{87{,}75}\cdot 403{,}3168 = 46{,}09$

Das Fahrzeug hatte eine Durchschnittsgeschwindigkeit von etwa $46\frac{m}{s}$.

Die zurückgelegte Strecke ist mit etwa $403{,}3\ m$ bereits berechnet, denn die Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeit in einem bestimmten Intervall ist gleich der zurückgelegten Strecke.

Das Fahrzeug hat eine Strecke von etwa $403\ m$ *in* $8{,}75\ s$ *zurückgelegt.*

Lösung 3

4.1 $E(x) = 50x$

$G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 10x^2 + 10x - 100;\ \ x \in [0; 11]$

Größere Produktionsmenge mit höheren Gesamtkosten:

$K'(x) = 3x^2 - 20x + 40$

$3x^2 - 20x + 40 = 0 \quad | \quad :3$

$x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{40}{3} = 0$

$x_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} - \frac{120}{9}} \quad | \quad p/q$-Formel

$\mathbb{L} = \{\}$

Die Funktion besitzt keine Extremstellen.

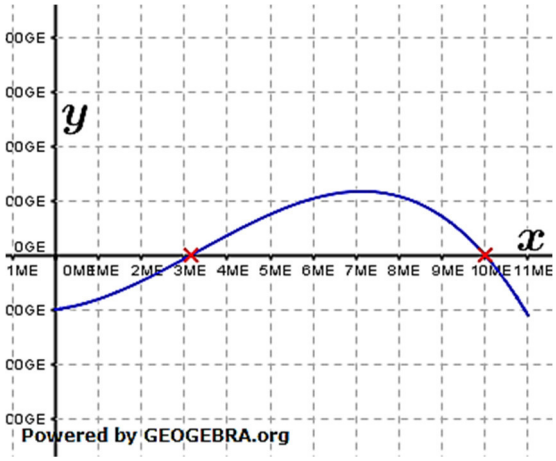
Für $x \longrightarrow \infty$ verläuft $K(x) \longrightarrow \infty$. Je größer die Produktionsmenge, umso höher sind die Gesamtkosten.

4.2 Grafik links.

Gewinnzone:

Die Gewinnzone ist der Bereich, in dem nebenstehende Grafik oberhalb der x-Achse verläuft. Somit:

Gewinnzone in $=]\sqrt{10}; 10[$.



4.3 Der geringste Anstieg der Produktionskosten ist im Wendepunkt des Graphen von K, somit $f''(x) = 0$.

$K'(x) = 3x^2 - 20x + 40$ | siehe Aufgabenteil 4.1

$K''(x) = 6x - 20$

$6x - 20 = 0 \Longrightarrow \ x = \frac{10}{3}$

Bei einer Produktion von $\frac{10}{3}$ ME ist der Anstieg der Produktionskosten am niedrigsten.

Lösung A4

2.1 Die Punktprobe mit Punkt $P(8|0{,}8)$ (aus Grafik abgelesen) ergibt:

$1 - e^{-8k} = 0{,}8$

$-e^{-8k} = -0{,}2$

$e^{-8k} = 0{,}2$ | ln

$-8k = ln(0{,}2)$ | $:(-8)$

$k = -\frac{ln(0{,}2)}{8} \approx 0{,}201$

Die Materialkonstante hat einen Wert von etwa $0{,}2\ cm^{-1}$.

$0{,}99 = 1 - e^{-0{,}2d}$

$e^{-0{,}2d} = 0{,}01$ | ln

$-0{,}2d = \ln(0{,}01)$ | $:(-0{,}2)$

$d = -\frac{\ln(0{,}01)}{0{,}2} \approx 23{,}03$

Die Wanddicke muss etwa $23\ cm$ betragen.

2.2 Absorption der Bleiplatte versus Aluminiumplatte:

$A(d) = 1 - e^{-1{,}62d}$

$1 - e^{-0{,}15d_{Alu}} = 1 - e^{-1{,}62 \cdot 5}$

$0{,}15d_{Alu} = 8{,}1$

$d_{Alu} = 54$

Es werden somit 11 Aluminiumplatten mit jeweils einer Dicke von $5\ cm$ benötigt. Das Aluminium wiegt dadurch $11 \cdot 12{,}13 = 133{,}43\ kg$

Kosten Aluminium: $133{,}43 \cdot 1{,}50 \approx 200\ €$

Kosten Blei: $51 \cdot 1{,}60 \approx 81{,}60\ €$

$\frac{200\ €}{81{,}60\ €} = 2{,}45$

Die Aluminiumplatten sind somit um $245\ \%$ teurer als die Bleiplatte.

Lösung A5

3.1 Richtig ist $p(t) = 60 \cdot e^{ln(0{,}96)t}$, denn im Aufgabentext steht …der Preis wird an jedem Auktionstag um 4% *„bezogen auf den Preis des Vortages"*…gesenkt. Dies ist exponentieller Zerfall mit dem Wachstumsfaktor $0{,}96$.

Die Formel des Händlers würde eine tägliche Preisreduzierung von 4% auf den Ursprungspreis bedeuten.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Spätester Verkauf ohne Verlust:
Der Verkaufspreis muss die Auktionskosten von 30 Euro decken. Somit gilt:
$60 \cdot e^{\ln(0{,}96)t} = 30$
$ln(0{,}96)\, t = ln(0{,}5)$
$t = \frac{ln(0{,}5)}{ln(0{,}96)} \approx 16{,}98$
Der Händler muss die Giraffe spätestens am $17.$ Auktionstag verkauft haben, damit er keinen Verlust macht.
(Hinweis: t abgerundet auf 16 bedeutet den $17.$ Auktionstag, da Auktionstag 1 bei $t = 0$ ist.)

3.2 Prozentsatz für Auktionsende am $50.$ Tag ohne Verlust.
Verlust ab dem $50.$ Auktionstag bedeutet $t = 49$, denn der erste Auktionstag ist $t = 0$. Somit muss gelten
$p(48) \geq 30$
$p(t) = 60 \cdot q^t$
$30 \leq 60 \cdot q^{48}$
$q^{48} \geq 0{,}5$
$q \geq \sqrt[48]{0{,}5} \approx 0{,}98567$
$1 - 0{,}98567 = 0{,}01433$
Der Prozentsatz der täglichen Preissenkung müsste etwa $1{,}43\ \%$ *betragen.*

Lösung A6

4.1 (1) Maximale Beschleunigung von Kai:
Die größte Steigung des Geschwindigkeitsgraphen von Kai ist zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Tangente im Ursprung hat etwa den Wert $m = \frac{30}{4} = 7{,}5$.
Die maximale Beschleunigung von Kai beträgt $7{,}5\,\frac{m}{s^2}$.

(2) Zeitpunkt, zu dem Frank und Kai gleich stark beschleunigen:
Dies bedeutet, dass die Steigungen der Tangenten von Frank und Kai gleich groß sein müssen. Dies ist – entsprechend der Grafik – etwa zum Zeitpunkt $t = 8\,s$ der Fall.

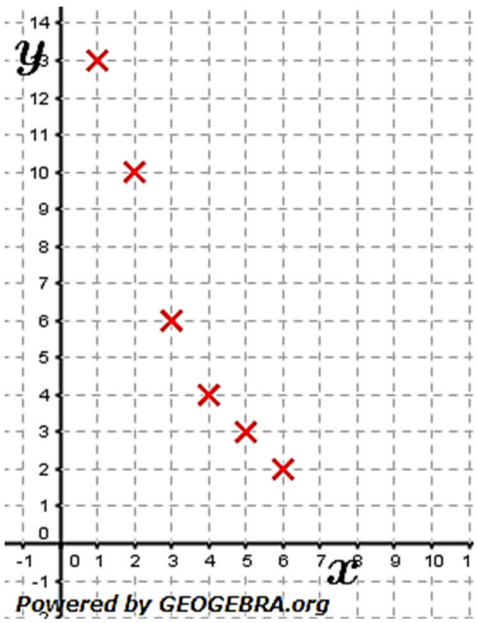
4.2 Wegstrecke von Frank nach $40\,s$ Sekunden Fahrt:
$$s = \int_0^{40} v(t)\,dt = \left[\frac{65}{0{,}098} e^{-}0{,}098t + 65t\right]_0^{40} = 663{,}17e^{-0{,}098 \cdot 40} + 2600 - 663{,}17$$
$$= 13{,}15 + 2600 - 663{,}17 \approx 1950$$
Frank hat nach 40 *Sekunden Fahrt etwa* $1950\,m$ *Wegstrecke zurückgelegt.*

Frank wird als Sieger aus dem Rennen hervorgehen, da er nach 40 Sekunden Fahrt einen Vorsprung von etwa $9\,m$ vor Kai hat und gemäß Diagramm seine Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt größer ist als die von Kai.

Lösung A7

2.1 Vorgang des exponentiellen Zerfalls mit $B(t) = B(0) \cdot q^t$ bzw. $b(t) = a \cdot e^{kt}$ und im weiteren Verlauf wahrscheinlich asymptotisch gegen Null läuft.
Eine Regression mit dem GTR/WTR ergibt:

$B(t) = 19{,}63 \cdot 0{,}682^t$ bzw.
$b(t) = 19{,}63 \cdot e^{-0{,}382t}$.



2.2 $0{,}5 = e^{-0{,}343t}$ | ln
$ln(0{,}5) = -0{,}343t$
$t = -\frac{ln(0{,}5)}{0{,}343} = 2{,}02$
Die Halbwertzeit beträgt $2{,}02\ min$.

2.3 Der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von r entspricht der Menge an entstandenem Wasserstoff. Somit gilt:

$50 = \int_0^x r(t)\,dt = \int_0^x (19 \cdot e^{-0{,}343t})\,dt = \left[-\frac{19e^{-0{,}343t}}{0{,}343}\right]_0^x = -\frac{19e^{-0{,}343x}}{0{,}343} + \frac{19}{0{,}343}$

$50 - \frac{19}{0{,}343} = -\frac{19e^{-0{,}343x}}{0{,}343}$

$-5{,}39 = -\frac{19e^{-0{,}343x}}{0{,}343}$ | $\cdot -0{,}343$

$0{,}09704 = e^{-0{,}343x}$ | ln

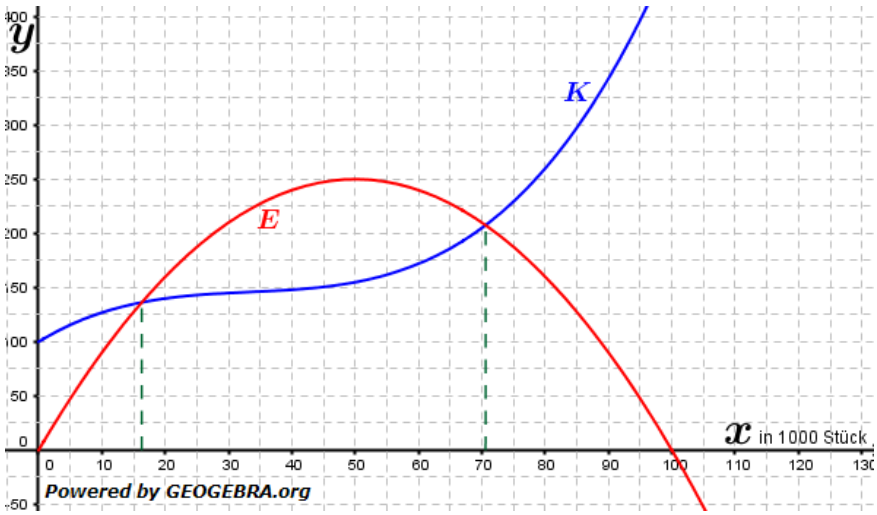
$\ln(0{,}09704) = -0{,}343x$

$x = -\frac{ln80{,}09704)}{0{,}343} = 6{,}79$

Es dauert ca. $6{,}8\ min$, bis $50\ ml$ Wasserstoff entstanden sind.

Lösung A8

3.1 Schaubild K der Gesamtkostenfunktion, Schaubild E der Erlösfunktion.



Gewinnzone näherungsweise: $x_{GS} = 16300$; $x_{GG} = 70500$

3.2 *Maximalgewinn*

Gewinn = Erlös – Kosten

$G(x) = E(x) - K(x) = -100x^2 + 10000x - (x^3 - 100x^2 + 3600x + 100000)$

$G(x) = -x^3 + 6400x - 100000$

$g'(x) = -3x^2 + 6400$

$x^2 = \frac{6400}{3} \implies x = 46{,}19$

$G(46{,}19) = 97069$

Bei einer Stückzahl von 46190 *Stück macht das Unternehmen den maximalen Gewinn von ca.* 97069 *US-Dollar.*

3.3 Um keinen Verlust zu machen, muss das Unternehmen mindestens seine Kosten decken.

Kosten pro Stück bei 4000 Stück: $\frac{K(4)}{4000} = \frac{112864}{4000} = 28{,}22$

Das Unternehmen müsste bei einem Absatz von 4000 Kugelschreibern mindestens $28{,}22$ US-Dollar pro Stück verlangen, damit es keinen Verlust macht.

Lösung A9

4.1 Dreifacher Kaninchenbestand:

Bestand zu Beginn der Beobachtung war 150 Kaninchen.

Dreifacher Bestand: 450 Kaninchen.

$450 = 1000 \cdot (1 - 0{,}85e^{-0{,}0153t}) = 1000 - 850e^{-0{,}0153t}$

$850e^{-0{,}0153t} = 550$

$e^{-0{,}0153t} = \frac{55}{85} = \frac{11}{17} \qquad | \quad ln$

$-0{,}0153t = ln\left(\frac{11}{17}\right)$

$t = -\frac{ln\left(\frac{11}{17}\right)}{0{,}0153} = 8{,}49$

Nach ca. $8{,}49$ *Monaten hat sich der Anfangsbestand verdreifacht.*

Bestand nicht beliebig groß:

Die gegebene Funktion ist eine Funktion beschränkten Wachstums mit einer oberen Schranke von $S = 1000$.

4.2 Eine Änderungsrate ist die erste Ableitung der Bestandsfunktion.

$k(t) = 1000 - 850e^{-0{,}0153t}$

$k'(t) = 0{,}0153 \cdot 850e^{-0{,}0153t} = 43{,}605 \cdot e^{-0{,}0153t}$

Änderungsrate am größten:

Eine Änderungsrate ist in einem Wendepunkt am größten bzw. kleinsten. Da $k'(t)$ jedoch streng monoton fallend ist, hat $k(t)$ keine Wendepunkte. Der größte Wert von $k'(t)$ ist somit $k'(0) = 43{,}605$.

4.3 Mittlere Änderungsrate in den ersten fünf Monaten:

$\overline{m} = \frac{1}{5}\int_0^5 f'(t)dt = \frac{1}{5} \cdot \big(k(5) - k(0)\big) = \frac{1}{5} \cdot (342{,}3 - 150) = 38{,}46$

Die mittlere Änderungsrate in den ersten fünf Monaten beträgt etwa 38 *Kaninchen/Monat.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de