# Aufgabe A10

2. Im Jahr 1986 gab es in Tschernobyl ein Reaktorunglück, bei dem die radioaktiven Isotope Cäsium-137 und Plutonium-241 freigesetzt wurden. Deren Radioaktivität ist noch immer messbar. Im Folgenden entspricht der Zeitpunkt $t = 0$ dem Jahr $1986$, wobei $t$ in Jahren gemessen wird.

2.1 Die folgende Tabelle zeigt die geschätzten Werte für die nicht Zerfallene Menge an Cäsium-137 (in Gramm), welche auf der Fläche Deutschlands insgesamt zu den angegebenen Zeitpunkten vorhanden waren. **2P**

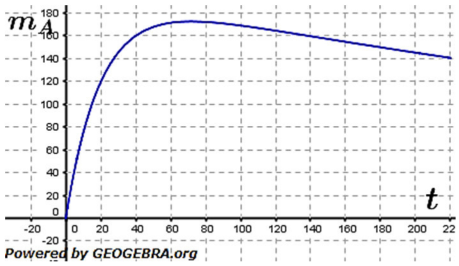
| Jahr | 1986 | 1991 | 1996 | 2006 |
|---|---|---|---|---|
| Cäsium-137 | 230,00 | 204,91 | 182,55 | 144,89 |

Der Zerfall des vorhandenen Cäsiums-137 soll durch eine Funktion $m$ mit $m(t) = a \cdot b^t;\ t \geq 0$ beschrieben werden.
Bestimme passende Werte für $a$ und $b$.

2.2 Die zum Zeitpunkt $t$ vorhandene Menge Cäsium-137 in Gramm wird Durch das Modell $m_c$ mit $m_c(t) = 230e^{-0{,}023t};\ t \geq 0$ beschrieben. **4P**
Wie viel Prozent des ursprünglich vorhandenen Cäsiums-137 sind im Jahr 2018 noch vorhanden?
In welchem Jahr wird nur noch $1\,\%$ der ursprünglichen Menge an Cäsium-137 vorhanden sein?

2.3 Plutonium-241 zerfällt zu Americum-241, welches selbst auch radioaktiv ist und daher weiter zerfällt. Die zum Zeitpunkt $t$ vorhandene Menge Americum-241 in Milligramm wird durch das Modell $m_A$ mit $m_A(t) = 200(1 - e^{-0{,}048t}) \cdot e^{-0{,}0016t};\ t \geq 0$ angenähert.
Die Abbildung zeigt das zugehörige Schaubild.

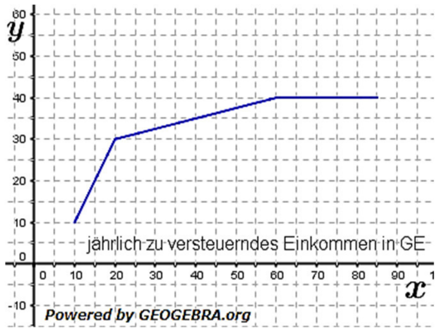
2.3.1 Begründe mithilfe der Abbildung, dass Plutonium-241 schneller zerfällt als Americum-241. **2P**




2.3.2 In welchem Jahr ist die Menge des Vorhanden Americums-241 am größten? Bestimme den Zeitpunkt auf ein halbes Jahr genau. (Auf einen Nachweis wird verzichtet). **2P**

## Aufgabe A11

3. Im Einkommensteuerbescheid wird unter anderem der Durchschnittsteuersatz angegeben. Eine Geldeinheit (GE) entspricht im Folgenden $1000\,EUR$.
Der Durchschnittsteuersatz kann aus dem Grenzsteuersatz, der im Schaubild dargestellt ist, berechnet werden.
Beispiel:
Bei einem Jahreseinkommen von $15000\,EUR$ ($15\,GE$) sind die ersten $10000\,EUR$ ($10\,GE$) steuerfrei.
Die restlichen $5000\,EUR$ ($5\,GE$) werden zwischen $10\,\%$ und $20\,\%$ besteuert, also im Mittel mit $5\,\%$.
Die Steuer beträgt demnach $750\,EUR$, und der Durchschnittsteuersatz ist $750$ geteilt durch $15000$, also $5\,\%$.




Im Folgenden sollen die Informationen für Einkommen bis $85\,GE$ aus dem Schaubild genutzt werden.

3.1 Zeige, dass bei einem Jahreseinkommen von $40000\,EUR$ Steuern in Höhe von $8500\,EUR$ anfallen. **3P**
Bestimme den zugehörigen Durchschnittsteuersatz.

3.2 Kann der Durchschnittsteuersatz für ein Einkommen $40\,\%$ sein? **2P**
Begründe.

3.3 Für $60 < x < 85$ kann der Durchschnittsteuersatz $S$ (in $\%$ ) in Abhängigkeit des Jahreseinkommens $x$ (in GE) folgendermaßen ermittelt werden: **5P**

$$S(x) = \frac{1600+40(x-60)}{x}$$

Berechne, für welches Einkommen der Durchschnittsteursatz $28\,\%$ ist.
Erläutere mithilfe des obigen Schaubilds, wie sich der Term für $S$ ergibt.

## Aufgabe A12

4. Als Lärmschutzwälle werden zwei Erdwälle der Gesamtbreite $24\,m$ errichtet. Der Verlauf des Querschnitts wird modelliert durch das Schaubild der Funktion $g$ mit

$$g(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2;\quad 0 \le x \le 24.$$

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

4.1 Zeichne das zugehörige Schaubild in ein geeignetes Koordinaten-system. **3P**

4.2 Die beiden Erdwälle werden auf eine Länge von $50\,m$ geplant. **4P**
Berechne die hierfür notwendige Erdmenge in Kubikmetern.

4.3 Überprüfe die Aussage:
Die Steigung des Erdwalls beträgt höchstens $100\,\%$. **1P**

4.4 Der Verlauf des Querschnitts des linken Walls lässt sich näherungsweise auch durch eine Funktion $p$ mit **2P**

$$p(x) = kx^2(x-12)^2$$

beschreiben.
Bestimme $k$.

## Aufgabe A13

2. Bei den olympischen Sommerspielen $2008$ in Peking legte der Jamaikaner Usain Bolt die $100$ Meter (m) in der damaligen Weltrekordzeit von fabelhaften $9{,}69$ Sekunden (s) zurück. Dabei begann Bolt bereits nach $80\,m$ zu jubeln und verringerte somit vorzeitig seine Geschwindigkeit.
Analysiert man seinen Lauf auf jeweils $10\,m$ langen Abschnitten, ergeben sich die folgenden Daten:

| $d$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 0 | 1,85 | 2,87 | 3,78 | 4,65 | 5,50 | 6,32 | 7,14 | 7,96 | 8,79 | 9,69 |
| $\overline{v}$ | | 5,41 | 9,80 | 10,99 | 11,49 | 11,76 | 12,19 | 12,19 | 12,19 | 12,05 | 11,11 |

In der Tabelle bedeuten:
- $d$ die zurückgelegte Distanz in $m$
- $t$ die Zeit in $s$
- $\overline{v}$ die Durchschnittsgeschwindigkeit im jeweiligen $10$-m-Intervall in $\frac{m}{s}$.

Zum Beispiel ist $5{,}41\frac{m}{s}$ die Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$ auf den ersten $10$ Metern.

2.1 Wie lange benötigte Bolt für die letzten $50\,m$ des Laufs? **5P**
Kann ein Mensch mit einer höheren Geschwindigkeit als $40\,km/h$ rennen?
Welche Zeit hätte Bolt erreicht, wenn er in diesem Lauf die maximale Durchschnittsgeschwindigkeit aus der Tabelle bis zum Ende des Laufs beibehalten hätte?

2.2 Die Funktion $v$ mit **2P**
$v(t) = 0{,}0382t^3 - 0{,}8158t^2 + 5{,}4828t + 0{,}4546;\;\; t \in [0;9{,}69]$
modelliert die Momentangeschwindigkeit $v$ in $\frac{m}{s}$ in Abhängigkeit von der Laufzeit $t$ in $s$.
Zeige, dass Bolt nach diesem Modell zwischen $t = 5{,}4\,s$ und $t = 5{,}5\,s$ die maximale Geschwindigkeit erreichte.

2.3 Formuliere für Bolts Lauf eine passende Frage, deren Antwort die Lösung der Gleichung $\int_3^{3+z} v(t)\,dt = 50$ für $z > 0$ ist. **3P**

## Aufgabe A14

3. In einem Bootsverleih kann man sich Boote verschiedenen Typs ausleihen. Die entsprechenden Preise sind in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet.

| Bootstyp | Preis je Stunde |
|---|---|
| Motorboot | $35$ € |
| Elektroboot | $25$ € |
| Tretboot | $10$ € |

3.1 An einem heißen Sommertag sind alle $48$ Boote gleichzeitig ausgeliehen. Die Einnahmen nach einer Stunde betragen $980$ €. Die Anzahl der Tretboote ist doppelt so groß wie die Anzahl der Motorboote. Wie viele Motor-, Elektro- und Tretboote besitzt der Bootsverleih? **5P**

3.2 Für die letzte Stunde des Tages fragt sich Jutta, wie viele Motorboote mindestens unterwegs sind. **5P**
Dazu stellt sie das nachfolgende LGS auf:
$x + y + z = 25$
$35x + 25y + 10z = 525$
Und formt dieses auf die Dreiecksform um:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1{,}5 & -10 \\ 0 & 1 & 2{,}5 & 35 \end{array}\right)$
Welche Information hat Jutta?
Beantworte Juttas Frage.

## Aufgabe A15

4. Ein Kondensator ist ein Bauteil, das elektrische Ladung speichert. Der Ladevorgang eines Kondensators wird im Labor untersucht. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt der Aufladevorgang. Die Stärke des elektrischen Stroms, der beim Aufladen fließt, wird gemessen.
Die Messwerte sind in folgender Tabelle zusammengefasst.

| $t$ in Sekunden ($s$) | $1{,}0$ | $2{,}4$ | $4{,}8$ | $7{,}2$ | $9{,}6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I$ in Milliampere ($mA$) | $9{,}0$ | $6{,}0$ | $3{,}0$ | $1{,}5$ | $0{,}75$ |

Der Zusammenhang zwischen der Zeit $t$ und der Stromstärke $I$ soll durch eine Exponentialfunktion $f$ mit $f(t) = a \cdot e^{kt}$ beschrieben werden.

4.1 Bestimme einen Funktionsterm. **2P**

4.2 Wann ist die momentane Änderungsrate der Stromstärke ebenso groß wie ihre durchschnittliche Änderungsrate im Zeitraum von $1{,}0\,s$ bis $2{,}4\,s$? **2P**

4.3 Die Stromstärke $I$ ist die momentane Änderungsrate der Ladung $Q$.
Die Ladung wird in Milliampere-Sekunden (mAs) gemessen.

4.3.1 Bestimme die Ladung, die in den ersten $18$ Sekunden auf dem Kondensator gespeichert wird. **4P**

4.3.2 Nach welcher Zeit trägt der Kondensator $60\,\%$ dieser Ladung? Gib einen zugehörigen Rechenansatz an. **2P**

## Aufgabe A16

2. Die Gesamtkosten eines Unternehmens bei der Herstellung eines Produktes werden durch die Funktion $K$ mit

$$K(x) = x^3 - 10x^2 + 100;\; x \in \; [0; 11]$$

beschrieben.
Dabei bezeichnen $x$ die Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ die Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE).

2.1 Prüfe, ob eine größere Produktionsmenge stets auch mit höheren Gesamtkosten verbunden ist. **2P**

2.2 Der Verkaufspreis beträgt $50$ GE. Der Erlös ist das Produkt aus Verkaufspreis und Verkaufsmenge. Der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Gesamtkosten.
Berechne den maximalen Gewinn. **5P**

2.3 Um die Produktionsmenge zu ermitteln, bei welcher die minimalen Stückkosten anfallen, schlägt Tom vor, das Minimum der Ableitungs-Funktion zu ermitteln.
Bewerte diesen Vorschlag und mache gegebenenfalls einen begründeten Gegenvorschlag. **3P**

## Aufgabe A17

3. In einem chemischen Experiment wird die Reaktionsgeschwindigkeit bei der Reaktion von Zink mit Salzsäure betrachtet. Man gibt Zink in verdünnte Salzsäure. Dabei entstehen unter anderem Zinkionen und Wasserstoff. Die Konzentration der Zinkionen in Abhängigkeit von der Zeit wird näherungsweise durch die Funktion $c$ beschrieben:

$$c(t) = 0{,}5(1 - e^{-0{,}343t});\; t \geq \; 0.$$

$t$ ist hierbei die Zeit in Minuten, $c(t)$ ist die Konzentration der Zinkionen in Mol pro Liter.
Die Reaktionsgeschwindigkeit (gemessen in $\frac{mol}{l \cdot min}$) ist die momentane Änderungsrate von $c$.

3.1 Zeichne das Schaubild von $c$ für die ersten $12$ Minuten.
Welchem Wert nähert sich die Konzentration im Laufe der Zeit an? **3P**

3.2 Gib die maximale Reaktionsgeschwindigkeit an.
Die Messung wird abgebrochen, wenn die Reaktionsgeschwindigkeit unter $0{,}002$ gefallen ist. Nach wie vielen Minuten ist dies der Fall? **4P**

3.3 Bei dem Experiment wird der entstehende Wasserstoff in einem Standzylinder aufgefangen. Bei einer ersten Messung ergeben sich die folgenden Daten für die Zuwachsrate des Wasserstoffvolumens: **3P**

| Zeit in min | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zuwachsrate in $\frac{ml}{min}$ | 13 | 10 | 6 | 4 | 3 | 2 |

Bestimme eine geeignete Näherungsfunktion für die Zuwachsrate des Wasserstoffvolumens in Abhängigkeit von der Zeit und bewerte dessen Güte.

## Aufgabe A18

4. Nach einem Unfall auf einer Autobahn wird die Überholspur gesperrt. Der Verkehr rollt auf der anderen Fahrspur mit verminderter Geschwindigkeit an der Unfallstelle vorbei. Infolge des hohen Verkehrsaufkommens bildet sich ein Stau mit zunächst zunehmender Länge.

Nachdem die Unfallstelle geräumt ist, löst dich der Stau allmählich wieder auf. Die Anzahl der Fahrzeuge, die pro Minute in den Staubereich hineinfahren, ist $q_1$. Die Anzahl der pro Minute aus dem Staubereich herausfahrenden Fahrzeuge ist $q_2$. Die folgende Tabelle zeigt den Fahrzeugfluss $q = q_1 - q_2$ in Abhängigkeit von der Zeit $t$.
In einer vereinfachten Betrachtung gibt $q$ die Zahl der Fahrzeuge pro Minute an, um die sich die Staulänge verändert.

| $t$ (Minuten) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ (Anzahl der Fahrzeuge pro Minute) | 13,5 | 9,6 | 5 | 0 | −5 | −13,5 | −17,5 | −14 | 0 |

4.1 Stelle $q$ in Abhängigkeit von $t$ grafisch dar. Bestimme den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge ihr Maximum erreicht, und den Zeitpunkt, zu dem sich der Stau am schnellsten abbaut. **8P**
Skizziere in einem Koordinatensystem die Anzahl der Fahrzeuge im Stau in Abhängigkeit von der Messzeit.
Erläutere deine Vorgehensweise.

4.2 Die zeitliche Entwicklung des Fahrzeugflusses während der Messzeit kann durch folgende Funktion $q$ beschrieben werden: **2P**
$$q(t) = a(t+30)((t-b)(t-c)) \text{ mit } t \in [0; 60].$$
Bestimme die Konstanten $a$, $b$ und $c$ anhand der obigen Tabelle.

## Lösung A10

2.1 $m(0) = 230$
$230 = a \cdot b^0 = a$
$m(20) = 144{,}89 = 230 \cdot b^{20}$
$b^{20} = \frac{144{,}89}{230}$ $\quad | \quad \sqrt[20]{\phantom{x}}$
$b = 0{,}9772$
$m(t) = 230 \cdot b^{0{,}9772t}$

2.2 $m_c(32) = 230 \cdot e^{-0{,}023 \cdot 32} \approx 110{,}18$
Prozentualer Anteil: $\frac{110{,}18}{230} = 0{,}479 = 47{,}9\,\%$
*Im Jahr 2018 sind nach diesem Modell noch etwa der ursprünglichen Menge an Cäsium-137 vorhanden.*
$1\,\%$ der ursprünglichen Menge:
$0{,}01 = e^{-0{,}023t}$ $\quad | \quad ln$
$-0{,}023t = ln(0{,}01)$
$t = -\frac{ln(0{,}01)}{0{,}023} \approx 200{,}22$
*Im Laufe des Jahre 2186 wird noch $1\,\%$ an Cäsium-137 vorhanden sein.*

2.3.1 Der steile Anstieg des Schaubilds bis zum Hochpunkt (bei ) zeigt, dass Plutonium-241 vergleichsweise schnell in Americum-241 zerfällt. Danach fällt die Kurve flacher ab, was bedeutet, dass Americum-241 sehr viel langsamer zerfällt als Plutonium-241.

2.3.2 Die Wertetabelle des WTR liefert:
$m_A(70) = 172{,}6$
$m_A(73) = 172{,}6$
Alle Tabellenwerte von $t = 71$ bis $t = 72$ sind etwa gleich, somit liegt die Maximalstelle bei $t = 71{,}5$
$m_A(71{,}5) = 172{,}61$
$198 + 71{,}5 = 2057{,}5$; also im Laufe des Jahres 2057.

## Lösung A11

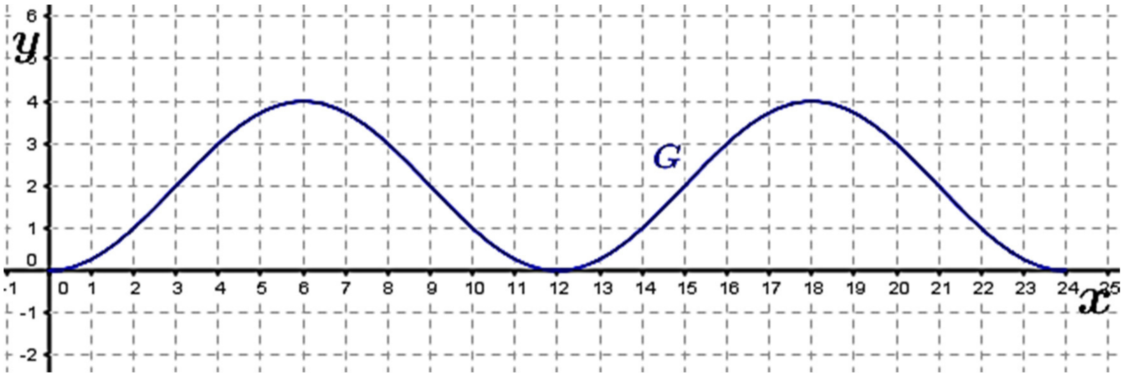
3.1 Für die ersten $10\,GE$ fallen keine Steuer an. Die darauffolgenden $10\,GE$ werden im Schnitt mit $20\,\%$ besteuert. $20\,\%$ ist der Mittelwert von $10\,\%$ und $30\,\%$. Das entspricht $2\,GE$ Steuern. Die restlichen $20\,GE$ werden im Durchschnitt mit $32{,}5\,\%$ vesteuert. Das ist der Mittelwert von $30\,\%$ und $35\,\%$. Das entspricht $6{,}5\,GE$ Steuern.
Insgesamt fallen somit bei einem Jahreseinkommen von $40\,000\,€$ Steuern in Höhe von $8\,500\,€$ an.
*Der Durchschnittssteuersatz beträgt* $\frac{8500}{40000} = 0{,}2125 = 21{,}25\,\%$.

3.2 Da stets die ersten $60\,000\,€$ eines Jahreseinkommens mit einem geringeren Grenzsteuersatz als $40\,\%$ besteuert werden und somit erst der Teil über $60\,000\,€$ mit dem Grenzsteuersatz von $40\,\%$ besteuert wird, der Durchschnittsteuersatz sich aber aus beiden Teilen zusammensetzt, wird derselbe deshalb stets unter $40\,\%$ liegen.

3.3 Aus der Grafik ermitteln wir:
$\frac{1600+40(x60)}{x} = 28$ $\quad | \quad \cdot x$
$1600 + 40x - 2400 = 28x \Longrightarrow \; x = 66{,}67$
Bei einem Einkommen von $66\,667\,€$ ist der Durchschnittsteuersatz $28\,\%$.

# Lösung A12

4.1




4.2 $V = 50 \cdot \int_0^{24} \left(-2\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2\right) dx = \left[-\frac{12}{\pi} sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2x\right]_0^{24} \approx 50 \cdot 48 = 2400$

*Zum Aufschütten der Wälle werden* $2400\,m^3$ *Erde benötigt.*

4.3 Eine Steigung ist am größ0ten in einem Wendepunkt mit positiver Steigung. Dieser Wendepunkt liegt bei $x = 3$.

$g'(x) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

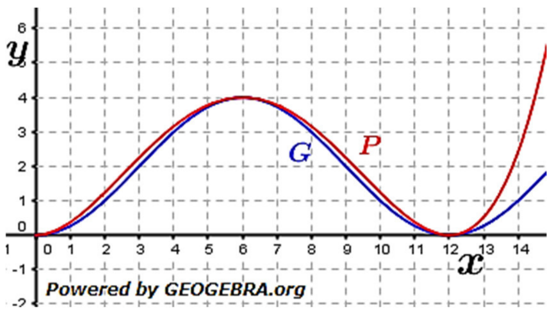
$g'(3) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 1{,}05 = 105\,\%$

*Die Aussage ist falsch. Die größte Steigung ist größer als* $100\,\%$.

4.4 Einer Punktprobe mit $P(6|4)$ ergibt:

$4 = k \cdot 36(6-12)^2 = 1296k$

$k = \frac{4}{36\cdot 36} = \frac{1}{324}$




# Lösung A13

2.1 Zeit für letzte $50\,m$ des Laufs:

$t = 9{,}69 - 5{,}50 = 4{,}19$

*Bolt benötigte* $4{,}19\,s$ *für die letzten* $50\,m$ *seines Laufs.*

$40\,km/h$ möglich für einen Menschen?

$40\frac{km}{h} = \frac{40}{3{,}6}\frac{m}{s} = 11{,}11\frac{m}{s}$.

Da in der Tabelle auch Geschwindigkeiten größer als $11{,}11\frac{m}{s}$ vorkommen, kann ein Mensch auch mehr als $40\frac{km}{h}$ erreichen.

Maximale Geschwindigkeit von Bolt war $12{,}19\frac{m}{s}$ bei Erreichen der $80\,m$ Marke. Er hätte somit noch $20\,m$ mit dieser Geschwindigkeit zurücklegen müssen. Hieraus ergibt sich $t$ für die letzten mit $t = \frac{s}{v} = \frac{20}{12{,}19} = 1{,}64\,s$.

Für die ersten $80\,m$ benötigte Bolt $7{,}96\,s$. $7{,}96 + 1{,}64 = 9{,}6\,s$.

Bei gleichbleibender Geschwindigkeit auf den letzten $20\,m$ hätte Bolt $9{,}6\,s$ benötigt.

2.2 Maximale Geschwindigkeit von Bolt ist Maximum der gegebenen Funktion.
$v'(t) = 0{,}1146t^2 - 1{,}6316t + 5{,}4828$
$v'(5{,}4) = 0{,}014 > 0;\quad v'(5{,}5) = -0{,}02435 < 0;$
Wegen VZW von „+“ nach „–“muss zwischen $t = 5{,}4\,s$ und $t = 5{,}5\,s$ ein Hochpunkt vorliegen, also maximale Momentangeschwindigkeit von Bolt.

2.3 Wie lange benötigte Bolt drei Sekunden nach dem Start für die darauffolgenden $50\,m$.

## Lösung A14

3.1 Motorboot = $x$; dann ist Tretboot = $2x$ und Elektroboot = $y$.
Wir erhalten nachfolgendes LGS:
(1) $x + 2x + y = 48$
$3x + y = 48 \implies y = 48 - 3x$
(2) $x \cdot 35 + 2x \cdot 10 + y \cdot 25 = 980$
$55x + 25y = 980$
$y \rightarrow$(2)
(2) $55x + 25(48 - 3x) = 980$
$-20x + 1200 = 980$
$20x = 220$
$x = 11$
Der Verleih hat $11$ Motorboote, $22$ Tretboote und $15$ Elektroboote.

3.2 Es sind insgesamt $x + y + z = 25$ Boote ausgeliehen. Die Einnahmen aus dieser Ausleihung betragen $35x + 25y + 10z = 525$ €.
Aus der in die Dreiecksform umgeformten Matrix lesen wir ab, dass es unendlich viele Lösungen gibt.
Zur Aufstellung des Lösungsvektors wählen wir eine Unbekannte frei, z. B. $z = t$ und erhalten
$y + 2{,}5t = 35 \implies y = 35 - 2{,}5t$
$x - 1{,}5t = -10 \implies x = -10 + 1{,}5t$
Für $t$ kommen nur positive Werte in Betracht, es gibt keine negativen Tretboote. Hieraus folgt:
$z = t \geq 0$
$x = -10 + 1{,}5t \geq 0$ für $t \geq 6{,}\overline{6}$
$y = 35 - 2{,}5t \geq 0$ für $0 \leq t \leq 14$
Alle Bedingungen werden eingehalten, wenn $t$ im Intervall $I = [6{,}\overline{6}; 14]$ liegt. Außerdem müssen $x$, $y$ und $z$ ganzzahlig sein. Es können also nur die ganzzahligen $t$-Werte $7$ bis $14$ vorkommen. Weiterhin müssen auch $x$ und $y$ ganzzahlig sein, sodass nur die $t$-Werte $t = 8$, $t = 10$, $t = 12$ bzw. $t = 14$ auf ganzzahlige Werte für $x$ und $y$ führen.
Da in der Aufgabe gefragt ist, wie viele Motorboote mindestens unterwegs sind, ist das $t$ gesucht, welches für $x$ die kleinste Zahl ergibt.
$x = -10 + 1{,}5t$ führt für $t = 8$ zum kleinsten Wert:
$x = -10 + 1{,}5 \cdot 8 = 2$
*Es müssen also mindestens $2$ Motorboote unterwegs sein.*

## Lösung A15

4.1 Eine Regression mit dem WTR führt zu $I(t) = 12{,}008 \cdot e^{-0{,}289t}$

4.2 Momentane Änderungsrate über $I'(t) = -0{,}289 \cdot 12{,}008 \cdot e^{-0{,}289t}$.
Mittlere Änderungsrate im Zeitraum von $1{,}0\,s$ bis $2{,}4\,s$:
$\overline{m} = \frac{f(2{,}4)-f(1)}{2{,}4-1} = \frac{6{,}001-8{,}994}{1{,}4} = -2{,}14.$
$-2{,}14 = -3{,}470312 \cdot e^{-0{,}289t} \quad | \quad : -3{,}470312$
$e^{-0{,}289t} = 0{,}6167 \quad | \quad ln$
$-0{,}289t = ln(0{,}6167)$
$t = 1{,}6725$
*Etwa $1{,}68\,s$ nach Beobachtungsbeginn ist die momentane Änderungsrate etwa gleich groß wie die mittlere Änderungsrate von $1{,}0\,s$ bis $2{,}4\,s$.*

4.3.1 Ladung in den ersten $18$ Sekunden:
$Q = \int_0^{18} I(t)\,dt = \int_0^{18} 12{,}008 \cdot e^{-0{,}289t} = \left[-\frac{12{,}008}{0{,}289} e^{-0{,}289t}\right]_0^{18} = -\frac{12{,}008}{0{,}289} e^{-5{,}202} + \frac{12{,}008}{0{,}289}$
$Q = -0{,}2288 + 41{,}55 = 41{,}32$
*In den ersten $18$ Sekunden beträgt die Ladung etwa $41{,}32\,mAs$.*

4.3.2 Die Zeit, nach welcher der Kondensator $60\,\%$ der Ladung trägt, sei $x$.
Die Auflösung der Gleichung $0{,}6 \cdot 41{,}32 = \int_0^x I(t)\,dt$ nach $x$ gibt die gesuchte Zeit in Sekunden an.

## Lösung A16

2.1 Die Gesamtkosten werden mit steigender Produktionszahl dann immer größer, wenn $K(x)$ keine Extremstellen besitzt und monoton steigend ist.
$K'(x) = 3x^2 - 20x + 40$
$3x^2 - 20x + 40 = 0 \quad | \quad :3$
$x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{40}{3} = 0$
$x_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} - \frac{120}{9}}$
Wegen $\frac{100}{9} - \frac{120}{9} < 0$ ist $\mathbb{L} = \{\}$
Für $x \longrightarrow \infty$ läuft $K(x) \longrightarrow \infty$, ist also streng monoton steigend.
$K(x)$ besitzt keine Extremstellen und ist streng monoton steigend, die Gesamtkosten werden mit steigender Produktionszahl immer größer.

2.2 $E(x) = 50x;\; G(x) = E(x) - K(x)$
$G(x) = 50x - x^3 + 10x^2 - 40x - 100 = -x^3 + 10x^2 + 10x - 100$
$G'(x) = -3x^2 + 20x + 10$
$G''(x) = -6x + 20$

$G'(x) = 0$:
$-3x^2 + 20x + 10 = 0 \quad | \quad :-3$
$x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{10}{3} = 0$
$x_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{30}{9}} = 3{,}33 \pm 3{,}8$
$x_1 = 7{,}13;\ \ x_2 = -0{,}47$
$G''(7{,}13) = -6 \cdot 7{,}13 + 20 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt (Maximum)
$G(7{,}13) = -7{,}13^3 + 10 \cdot 7{,}13^2 + 10 \cdot 7{,}13 - 100 = 117{,}20$
*Der maximale Gewinn liegt bei* $117{,}20$ *GE für* $7{,}13$ *produzierte und verkaufte ME.*

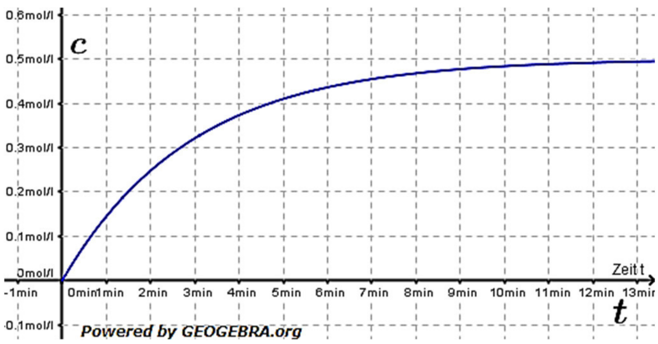
2.3 Der Vorschlag ist falsch. Mit Toms Vorschlag wird die Stelle mit der geringsten Steigung der Kostenfunktion ermittelt, also die Stelle, des momentanen geringsten Kostenzuwachses (Wendestelle).

Richtig ist, das Minimum der Stückkostenfunktion mit $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ zu ermitteln. Hier liegt das Betriebsoptimum bzw. die langfristige Preisuntergrenze.

## Lösung A17

3.1 Für $c \to \infty$ gilt $c(t) \to 0{,}5$ (obere Schranke).

Die Konzentration nähert sich dem Wert $0{,}5\frac{mol}{l}$.




3.2 Reaktionsgeschwindigkeit entspricht der Steigung des Graphen von $c$. In obiger Grafik erkennen wir, dass die Steigung bei $t = 0$ maximal ist:
$c'(t) = 0{,}5 \cdot 0{,}343e^{-0{,}343t} = 0{,}1715e^{-0{,}343t}$
$c'(0) = 0{,}1715$
*Die maximale Reaktionsgeschwindigkeit ist* $0{,}1715\frac{mol}{l \cdot min}$.
Abbruch der Messung bei $c'(t) = 0{,}002$:
$0{,}002 = 0{,}1715e^{-0{,}343t} \quad | \quad :0{,}1715$
$e^{-0{,}343t} = 0{,}0117 \quad | \quad ln$
$-0{,}343t = ln(0{,}0117) \quad | \quad :-0{,}343$
$t = \frac{\ln(0{,}0117)}{-0{,}343} = 12{,}97$
*Nach etwa* $13$ *Minuten wird die Messung abgebrochen.*

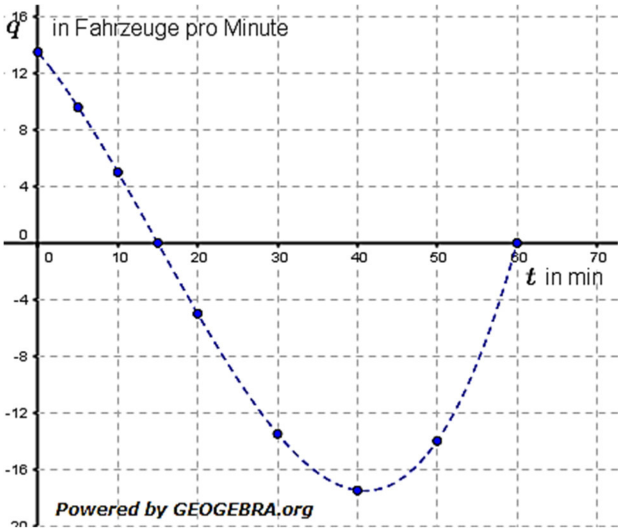
3.3 Mögliche Näherungsfunktionen (WTR):
Quadratische Regression: $q(t) = 0{,}39286t^2 - 4{,}97857t + 17{,}8$
Exponentielle Regression: $e(t) = 19{,}6327 \cdot 0{,}68237^t$ bzw.
$e(t) = 19{,}6327 \cdot e^{-0{,}3822t}$

Bewertung:
Wegen $r^2 = 0{,}9930$ für $q$ bzw. $r^2 = 0{,}9940$ für $e$ werden die Daten durch die Näherung sehr gut beschrieben.

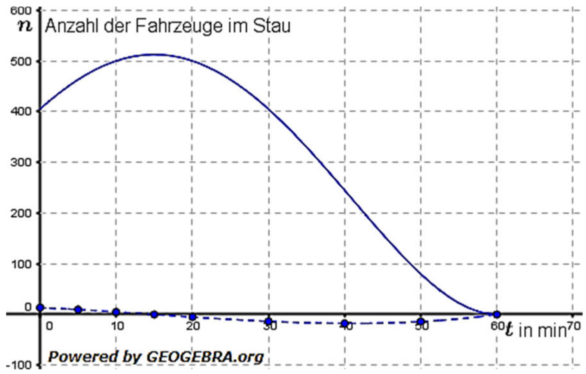
## Lösung A18

4.1 In den ersten $15$ Minuten wird der Stau länger ($q > 0$), danach nimmt seine Länge ab. Die Staulänge hat ihr Maximum nach $15$ Minuten erreicht ($q$ wechselt von $+$ nach $-$).

Nach $40$ Minuten baut sich der Stau am schnellsten ab, da $q$ hier minimal ist.




Zur Zeit $t = 0$ sind $405$ Fahrzeuge im Stau. Bis $t = 15$ ist $q$ positiv, d.h. die Anzahl der Fahrzeuge im Stau vergrößert sich. Ab $t = 15$ ist $q$ neghativ, d.h. die Anzahl der Fahrzeuge im Stau verringert sich. Bei $t \approx 40$ ist ein Wendepunkt. Nach $t = 60$ hat sich der Stau aufgelöst.




4.2 Ansatz: $q(t) = a(t+30)((t-b)(t-c))$
$b$ und $c$ liest man über die Nullstellen $x_1 = 15$ und $x_2 = 60$ ab.
Zur Ermittlung von $a$ machen wir eine Punktprobe mit $P(0|13{,}5)$.

$q(t) = a(t+30)((t-15)(t-60))$
$13{,}5 = a(30)(-15)(60)$
$a = \frac{13{,}5}{27000} = \frac{1}{2000}$
$q(t) = \frac{1}{2000}(t+30)((t-15)(t-60))$