Aufgabe A19

2. Die Monatsmittelwerte der Lufttemperatur in München sind in der Tabelle aufgelistet.

Monat	Jan	Feb	Mär	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
Mittlere Temperatur in $°C$	$-2{,}1$	$-0{,}9$	$3{,}3$	$8{,}0$	$12{,}5$	$15{,}8$	$17{,}5$	$16{,}6$	$13{,}4$	$7{,}9$	$3{,}0$	$-0{,}7$

2.1 Der Temperaturverlauf soll durch eine Funktion g mit **4P**

$$g(x) = a\sin\big(b(x+c)\big) + d;\ \ x \in \ [0;12]$$

angenähert werden, wobei die Temperaturen der Monatsmitte zuzuordnen sind (z.B. $g(0{,}5) = -2{,}1$).
Welche Bedeutung haben die Konstanten a und d für den Temperaturverlauf in München während des Jahres?
Bestimme die Konstanten a, b, c und d.

2.2 Die Lufttemperatur in $°C$ in München während eines Tages kann näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion f mit

$$f(x) = 9{,}7\sin\left(\frac{\pi}{12}(x-9{,}4)\right) + 14{,}8;\ \ x \in \ [0;24].$$

2.2.1 Formuliere einen Ansatz zur Berechnung der mittleren Lufttemperatur von 4 Uhr bis 9 Uhr morgens. **2P**

2.2.2 Um wieviel Uhr nimmt die Temperatur in München an diesem Tag am stärksten zu? **4P**

Aufgabe A20

3. Der Bestand an fester Holzmasse $h(t)$ zum Zeitpunkt t in einem Wald wird durch die Funktion h mit $h(t) = 10^5 \cdot e^{0{,}02t};\ t \geq \ 0$ beschrieben.
Dabei wird die Zeit t in Jahren und der Bestand $h(t)$ in m^3 gemessen.
($t = 0$ steht für das Jahr 2013)

3.1 Mit welchem Bestand wird im Jahr 2020 gerechnet? Nach welcher Zeit wird der Bestand erstmals über $150\,000\ m^3$ liegen? **3P**

3.2 Um wie viel Prozent nimmt der Holzbestand im Verlaufe des ersten Jahres zu? **1P**

3.3 Nach wie vielen Jahren wird die momentane Änderungsrate $2500\ m^3$ pro Jahr betragen? **3P**

3.4 Um eine Fragestellung zu beantworten, wählt Tom den Ansatz **3P**

$$\frac{1}{4}\int_3^7 h'(t)\,dt.$$

Timo hingegen will mit der Berechnung von die Frage lösen.
Notiere eine passende Fragestellung und bewerte die beiden Ansätze.

Aufgabe A21

4. Zwei Ingenieure planen den Bau eines Wasserkanals. In Ihrer Modellrechnung setzen sie für den Kanalquerschnitt ein $x-y$-Koordinatensystem so an, dass die x-Achse genau auf der Höhe des normalen Wasserstandes (Normalpegel) verläuft. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

   Unterhalb des Normalpegels wird die Randkurve des Kanalquerschnitts durch die Funktion f mit $f(x) = 0{,}0125x^4 - 3{,}2$ beschrieben.

4.1 Stelle den gesamten Kanalquerschnitt in einem Koordinaten-System dar. **3P**

4.2 Oberhalb des Normalpegels wird die Begrenzung des Kanals tangential Fortgeführt. Diese geradlinigen Fortführungen sind für einen $1{,}80$ Meter über Normalpegel liegenden Wasserstand ausgelegt. Berechne die Breite des Kanals in Höhe des Pegelstandes. **3P**

4.3 Die Ingenieure gehen von einer Strömungsgeschwindigkeit von $1{,}3\frac{m}{s}$ aus. Wie viel Kubikmeter Wasser fließen pro Sekunde bei Normalpegel durch den Kanalquerschnitt? **4P**

Lösung A19

2.1 Die Konstante a bestimmt die Maximal- bzw. Minimaltemperatur in München. Sie entspricht dem Ausschlag der Temperatur nach oben bzw. unten vom Mittelwert her gesehen. Die Konstante d stellt den jährlichen Temperatur-Mittelwert von München dar.

Aus der Tabelle ermitteln wir:

$g(x)_{max} = 17{,}5$ für $x = 6{,}5$; $g(x)_{min} = -2{,}1$ für $x = 0{,}5$

$a = \frac{g(x)_{max} - g(x)_{min}}{2} = \frac{17{,}5-(-2{,}1)}{2} = 9{,}8$

$d = \frac{g(x)_{max} + g(x)_{min}}{2} = \frac{17{,}5-2{,}1}{2} = 7{,}7$

Periode $p = 12 \Longrightarrow \quad b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

Ermittlung von c:

Die vorgegebene Funktion ist eine Sinuskurve. Der Nulldurchgang der Funktion durch die Mittellinie liegt zwischen Hoch- und Tiefpunkt in der Mitte. Die ist in unserem Falle bei $x = 3{,}5$; $g(3{,}5) = 8$

Punktprobe mit $P(3{,}5|8)$

$8 = 9{,}8 \sin\left(\frac{\pi}{6}(3{,}5 + c)\right) + 7{,}7$

$\frac{0{,}3}{9{,}8} = sin\left(\frac{\pi}{6}(3{,}5 + c)\right) = 0{,}0306$

$arcsin(0{,}0306) = \frac{\pi}{6}(3{,}5 + c)$

$\frac{\pi}{6}(3{,}5 + c) = 0{,}0306$

$c_1 = \frac{6 \cdot 0{,}0306}{\pi} - 3{,}5 = -3{,}44$

Mit ist die Sinuskurve um Einheiten nach rechts verschoben.

$g(x) = 9{,}8\, sin\left(\frac{\pi}{6}(x - 3{,}44)\right) + 7{,}7$

2.2.1 $\overline{T_{4;9}} = \frac{1}{9-4}\int_4^9 (9{,}7 \sin\left(\frac{\pi}{12}(x - 9{,}4)\right) + 14{,}8\, dx$

2.2.2 Stärkste Zunahme im Wendepunkt mit positiver Steigung. Die Sinuskurve hat die Periode $p = 24$ und ist in x-Richtung um $9{,}4$ Stunden nach rechts verschoben. An dieser Stelle befindet sich auch der Wendepunkt mit positiver Steigung.

Die stärkste Zunahme der Temperatur findet etwa um $9{:}24$ Uhr statt.

Lösung A20

3.1 $h(7) = 10^5 \cdot e^{0,02\cdot 7} = 1,15027 \cdot 10^5$

Im Jahr 2020 *kann mit einem Holzbestand von etwa* $115027\,m^3$ *gerechnet werden.*

$150000 > 10^5 \cdot e^{0,02\cdot t}$

$1,5 > e^{0,02t} \quad | \quad ln$

$0,02t = ln(1,5)$

$t = \frac{ln(1,5)}{0,02} = 20,27$

Im Verlaufe des $20.$ *Jahres nach Beobachtungsbeginn wird der Bestand erstmals größer als* $150000\,m^3$ *sein.*

3.2 $h(0) = 100000; \quad h(1) = 100000 \cdot e^{0,02}$

$\frac{h(1)}{h(0)} = e^{0,02} = 1,0202$

Der Holzbestand nimmt um etwa $2,02\,\%$ im Verlauf des ersten Jahre zu.

3.3 $h'(t) = 2500$

$2500 = 0,02 \cdot 10^5 \cdot e^{0,02t}$

$1,25 = e^{0,02t} \quad | \quad ln$

$0,02t = \ln(1,25)$

$t = \frac{\ln(1,25)}{0,02} = 11,157$

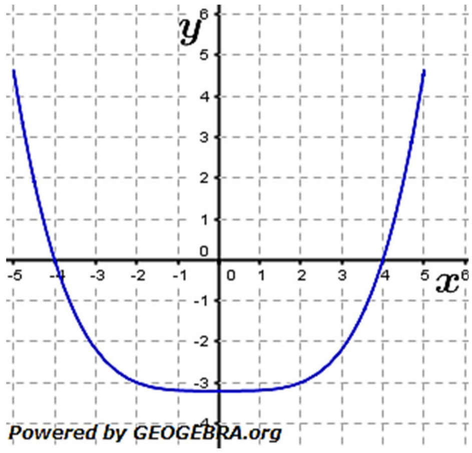
Nach ca. $11,16$ *Jahren wird die momentane Änderungsrate* $2500\,m^3$ *pro Jahr betragen.*

3.4 Fragestellung ist der mittlere Holzbestand im Zeitraum vom 3. bis 7. Jahr. Die gegebene Funktion ist die Bestandsfunktion. Somit ist die Fläche unter der Ableitungsfunktion im genannten Zeitraum die Bestandsveränderung. Die Multiplikation der Bestandsveränderung mit $\frac{1}{4}$ führt zur mittleren Bestandsveränderung vom 3. bis 7. Jahr.

Da h eine Stammfunktion von h' ist, ist der Ansatz von Timo gleichbedeutend mit dem Ansatz von Tom.

Lösung A21

4.1 Kanalquerschnitt:



4.2 Nullstellen der Randkurve sind

$x_1 = -4$ und $x_2 = 4$.

Tangente an f in $N_2(4|0)$:

$t_2(x) = f'(4) \cdot (x-4)$

$f'(x) = 0{,}05x^3$

$f'(4) = 3{,}2$

$t_2(x) = 3{,}2 \cdot (x-4) = 3{,}2x - 12{,}8$

Aus Symmetriegründen betrachten wir nur die rechte Seite. Für diese gilt nun:

$t_2(x) = 1{,}8 = 3{,}2x - 12{,}8$

$3{,}2x = 14{,}6$

$x = 4{,}56$

Oberkante Pegel rechts bei $1{,}8\,m$ Wasserstand ist $P(4{,}56|1{,}8)$

Die obere Gesamtbreite des Kanals ist somit $b = 2 \cdot 4{,}56 = 9{,}12\,m$.

4.3 $Q = A \cdot v$ (Fläche mal Strömungsgeschwindigkeit)

$Q = 1{,}3 \cdot \left|\int_{-4}^{4}(0{,}0125x^4 - 3{,}2)\right| = 1{,}3 \cdot \left|[0{,}0025x^5 - 3{,}2x]_{-4}^{4}\right| = 1{,}3 \cdot |(-20{,}48)|$

$Q = 26{,}624\,m^3/s$

Pro Sekunde fließen etwa $26{,}6\,m^3$ Wasser durch den Kanalquerschnitt.