Lösung A1

2.1 Trigonometrische Funktion der Messergebnisse:

Die Messergebnisse können entweder mit einer Sinusfunktion $(f(x) = asin(b(x-c)) + d)$ oder aber auch mit einer Kosinusfunktion $(f(x) = acos(b(x-c)) + d)$dargestellt werden.

Hierzu berechnen wir zunächst Amplitude, Verschiebung in y-Richtung sowie den Periodenfaktor b, wobei die Periode die Länge eines Jahres mit 360 Tagen sei.

$a = \frac{y_{HP}-y_{TP}}{2} = \frac{16{,}5-8}{2} = 4{,}25$ $\qquad$ $d = \frac{y_{HP}+y_{TP}}{2} = \frac{16{,}5+8}{2} = 12{,}25$

$b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{365}$

Jetzt erfolgt die Überlegung, ob Sinus- oder Kosinusfunktion. Bei 365 Tagen pro Jahr kommt der 16. Juni etwa bei 172 Tage ab dem 1. Januar zu liegen. Dies ist ein Hochpunkt.

Der Beginn einer Sinuskurve wäre somit bei $172 - \frac{p}{4} = 172 - 91 = 81$. Eine Sinuskurve wäre also 81 Tage in x-Richtung nach rechts verschoben. Die Funktionsgleichung würde lauten:

$$f(x) = 4{,}25 \cdot sin\left(\frac{2\pi}{365}(x-81)\right) + 12{,}25.$$

Alternativ die Kosinusfunktion: Wegen des Hochpunktes bei 172 Tagen wäre 2eine Kosinuskurve entweder um 165 Tage in x-Richtung nach rechts verschoben, oder aber eine an der x-Achse gespiegelte Kosinuskurve um 11 Tage nach links verschoben. Die Funktionsgleichung würde lauten:

$$f(x) = 4{,}25 \cdot cos\left(\frac{2\pi}{365}(x-172)\right) + 12{,}25$$

alternativ

$$f(x) = -4{,}25 \cdot cos\left(\frac{2\pi}{365}(x+11)\right) + 12{,}25$$

2.2 Die quadratische Näherung von Tina ist zur Modellierung ungeeignet, da eine Parabel nur eine Extremstelle und keine Wendestellen besitzt. Die Funktion beschreibt die Punktemenge nicht so gut, wie man am Bestimmtheitsgrad $r^2 = 0{,}8745$ erkennen kann.

Toms Näherung beschreibt die Punktemessung besser, da das Bestimmtheitsmaß sehr nahe bei 1 liegt.

Da sich die Sonnenscheindauer als Differenz zwischen Sonnenaufgang und Sinnenuntergang ergibt, ist diese für jedes Jahr gleich.

Toms Näherungsfunktion mit der Definitionsmenge $[0; 365]$ ist für jedes Jahr geeignet.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A2

3.1 $v(t) = -70e^{-0{,}313t} + 70$

$\frac{100\frac{km}{h}}{3{,}6\frac{km\cdot s}{m\cdot h}} = 27{,}78\frac{m}{s}$

$-70e^{-0{,}313t} + 70 = 27{,}78 \quad | \quad -70;\ :(-70)$

$e^{-0{,}313t} = 0{,}60314 \quad | \quad ln$

$-0{,}313t = \ln(0{,}60314) \quad | \quad :(-0{,}313)$

$t = \frac{\ln(0{,}60314)}{-0{,}313} = 1{,}61535$

Nach etwa $1{,}6$ Sekunden hat das Fahrzeug eine Geschwindigkeit von $100\ km/h$ erreicht.

3.2 $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{8{,}75}\int_0^{8{,}75}(-70e^{-0{,}313t} + 70)\,dt = \frac{1}{8{,}75}\left[\frac{-70e^{-0{,}313t}}{-0{,}313} + 70t\right]_0^{8{,}75}$

$= \frac{1}{87{,}75}\cdot 403{,}3168 = 46{,}09$

Das Fahrzeug hatte eine Durchschnittsgeschwindigkeit von etwa $46\frac{m}{s}$.

Die zurückgelegte Strecke ist mit etwa $403{,}3\ m$ bereits berechnet, denn die Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeit in einem bestimmten Intervall ist gleich der zurückgelegten Strecke.

Das Fahrzeug hat eine Strecke von etwa $403\ m$ *in* $8{,}75\ s$ *zurückgelegt.*

Lösung 3

4.1 $E(x) = 50x$

$G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 10x^2 + 10x - 100;\ \ x \in [0; 11]$

Größere Produktionsmenge mit höheren Gesamtkosten:

$K'(x) = 3x^2 - 20x + 40$

$3x^2 - 20x + 40 = 0 \quad | \quad :3$

$x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{40}{3} = 0$

$x_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} - \frac{120}{9}} \quad | \quad p/q$-Formel

$\mathbb{L} = \{\}$

Die Funktion besitzt keine Extremstellen.

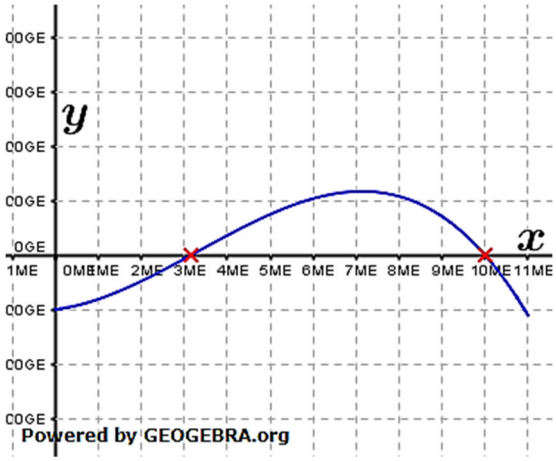
Für $x \longrightarrow \infty$ verläuft $K(x) \longrightarrow \infty$. Je größer die Produktionsmenge, umso höher sind die Gesamtkosten.

4.2 Grafik links.

Gewinnzone:

Die Gewinnzone ist der Bereich, in dem nebenstehende Grafik oberhalb der x-Achse verläuft. Somit:

Gewinnzone in $=]\sqrt{10}; 10[$.



4.3 Der geringste Anstieg der Produktionskosten ist im Wendepunkt des Graphen von K, somit $f''(x) = 0$.

$K'(x) = 3x^2 - 20x + 40$ | siehe Aufgabenteil 4.1

$K''(x) = 6x - 20$

$6x - 20 = 0 \Longrightarrow \ x = \frac{10}{3}$

Bei einer Produktion von $\frac{10}{3}$ ME ist der Anstieg der Produktionskosten am niedrigsten.

Lösung A4

2.1 Die Punktprobe mit Punkt $P(8|0{,}8)$ (aus Grafik abgelesen) ergibt:

$1 - e^{-8k} = 0{,}8$

$-e^{-8k} = -0{,}2$

$e^{-8k} = 0{,}2$ | ln

$-8k = ln(0{,}2)$ | $:(-8)$

$k = -\frac{ln(0{,}2)}{8} \approx 0{,}201$

Die Materialkonstante hat einen Wert von etwa $0{,}2\ cm^{-1}$.

$0{,}99 = 1 - e^{-0{,}2d}$

$e^{-0{,}2d} = 0{,}01$ | ln

$-0{,}2d = \ln(0{,}01)$ | $:(-0{,}2)$

$d = -\frac{\ln(0{,}01)}{0{,}2} \approx 23{,}03$

Die Wanddicke muss etwa $23\ cm$ betragen.

2.2 Absorption der Bleiplatte versus Aluminiumplatte:

$A(d) = 1 - e^{-1{,}62d}$

$1 - e^{-0{,}15d_{Alu}} = 1 - e^{-1{,}62 \cdot 5}$

$0{,}15d_{Alu} = 8{,}1$

$d_{Alu} = 54$

Es werden somit 11 Aluminiumplatten mit jeweils einer Dicke von $5\ cm$ benötigt. Das Aluminium wiegt dadurch $11 \cdot 12{,}13 = 133{,}43\ kg$

Kosten Aluminium: $133{,}43 \cdot 1{,}50 \approx 200\ €$

Kosten Blei: $51 \cdot 1{,}60 \approx 81{,}60\ €$

$\frac{200\ €}{81{,}60\ €} = 2{,}45$

Die Aluminiumplatten sind somit um $245\ \%$ teurer als die Bleiplatte.

Lösung A5

3.1 Richtig ist $p(t) = 60 \cdot e^{ln(0{,}96)t}$, denn im Aufgabentext steht …der Preis wird an jedem Auktionstag um 4% *„bezogen auf den Preis des Vortages"*…gesenkt. Dies ist exponentieller Zerfall mit dem Wachstumsfaktor $0{,}96$.

Die Formel des Händlers würde eine tägliche Preisreduzierung von 4% auf den Ursprungspreis bedeuten.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Spätester Verkauf ohne Verlust:
Der Verkaufspreis muss die Auktionskosten von 30 Euro decken. Somit gilt:
$60 \cdot e^{\ln(0{,}96)t} = 30$
$ln(0{,}96)\, t = ln(0{,}5)$
$t = \frac{ln(0{,}5)}{ln(0{,}96)} \approx 16{,}98$
Der Händler muss die Giraffe spätestens am $17.$ Auktionstag verkauft haben, damit er keinen Verlust macht.
(Hinweis: t abgerundet auf 16 bedeutet den $17.$ Auktionstag, da Auktionstag 1 bei $t = 0$ ist.)

3.2 Prozentsatz für Auktionsende am $50.$ Tag ohne Verlust.
Verlust ab dem $50.$ Auktionstag bedeutet $t = 49$, denn der erste Auktionstag ist $t = 0$. Somit muss gelten
$p(48) \geq 30$
$p(t) = 60 \cdot q^t$
$30 \leq 60 \cdot q^{48}$
$q^{48} \geq 0{,}5$
$q \geq \sqrt[48]{0{,}5} \approx 0{,}98567$
$1 - 0{,}98567 = 0{,}01433$
Der Prozentsatz der täglichen Preissenkung müsste etwa $1{,}43\ \%$ *betragen.*

Lösung A6

4.1 (1) Maximale Beschleunigung von Kai:
Die größte Steigung des Geschwindigkeitsgraphen von Kai ist zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Tangente im Ursprung hat etwa den Wert $m = \frac{30}{4} = 7{,}5$.
Die maximale Beschleunigung von Kai beträgt $7{,}5\,\frac{m}{s^2}$.

(2) Zeitpunkt, zu dem Frank und Kai gleich stark beschleunigen:
Dies bedeutet, dass die Steigungen der Tangenten von Frank und Kai gleich groß sein müssen. Dies ist – entsprechend der Grafik – etwa zum Zeitpunkt $t = 8\,s$ der Fall.

4.2 Wegstrecke von Frank nach $40\,s$ Sekunden Fahrt:
$$s = \int_0^{40} v(t)\,dt = \left[\frac{65}{0{,}098} e^{-}0{,}098t + 65t\right]_0^{40} = 663{,}17e^{-0{,}098 \cdot 40} + 2600 - 663{,}17$$
$$= 13{,}15 + 2600 - 663{,}17 \approx 1950$$
Frank hat nach 40 *Sekunden Fahrt etwa* $1950\,m$ *Wegstrecke zurückgelegt.*

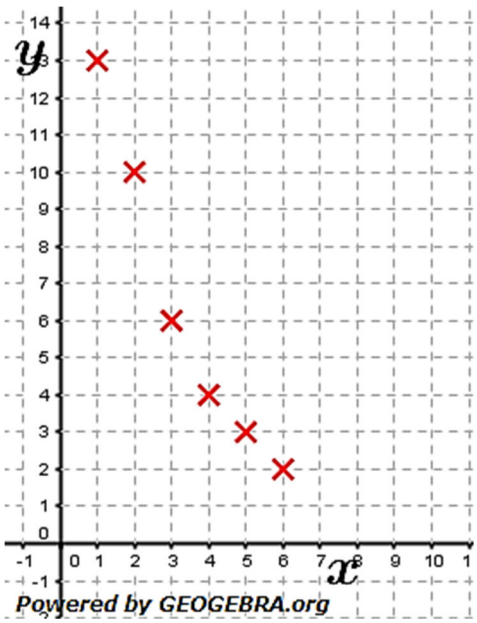
Frank wird als Sieger aus dem Rennen hervorgehen, da er nach 40 Sekunden Fahrt einen Vorsprung von etwa $9\,m$ vor Kai hat und gemäß Diagramm seine Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt größer ist als die von Kai.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A7

2.1 Vorgang des exponentiellen Zerfalls mit $B(t) = B(0) \cdot q^t$ bzw. $b(t) = a \cdot e^{kt}$ und im weiteren Verlauf wahrscheinlich asymptotisch gegen Null läuft.
Eine Regression mit dem GTR/WTR ergibt:

$B(t) = 19{,}63 \cdot 0{,}682^t$ bzw.
$b(t) = 19{,}63 \cdot e^{-0{,}382t}$.



2.2 $0{,}5 = e^{-0{,}343t}$ | ln
$ln(0{,}5) = -0{,}343t$
$t = -\frac{ln(0{,}5)}{0{,}343} = 2{,}02$
Die Halbwertzeit beträgt $2{,}02\ min$.

2.3 Der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von r entspricht der Menge an entstandenem Wasserstoff. Somit gilt:

$50 = \int_0^x r(t)\,dt = \int_0^x (19 \cdot e^{-0{,}343t})\,dt = \left[-\frac{19e^{-0{,}343t}}{0{,}343}\right]_0^x = -\frac{19e^{-0{,}343x}}{0{,}343} + \frac{19}{0{,}343}$

$50 - \frac{19}{0{,}343} = -\frac{19e^{-0{,}343x}}{0{,}343}$

$-5{,}39 = -\frac{19e^{-0{,}343x}}{0{,}343}$ | $\cdot -0{,}343$

$0{,}09704 = e^{-0{,}343x}$ | ln

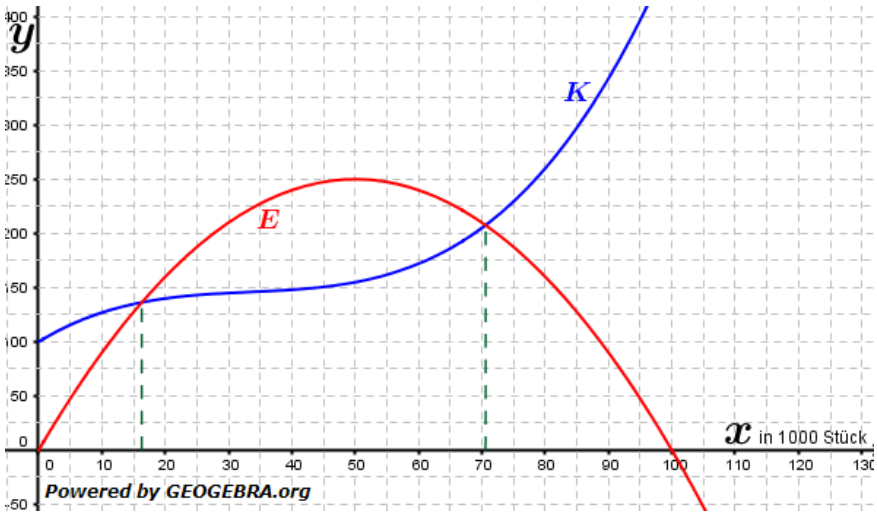
$\ln(0{,}09704) = -0{,}343x$

$x = -\frac{ln80{,}09704)}{0{,}343} = 6{,}79$

Es dauert ca. $6{,}8\ min$, bis $50\ ml$ Wasserstoff entstanden sind.

Lösung A8

3.1 Schaubild K der Gesamtkostenfunktion, Schaubild E der Erlösfunktion.



Gewinnzone näherungsweise: $x_{GS} = 16300$; $x_{GG} = 70500$

3.2 *Maximalgewinn*

Gewinn = Erlös – Kosten

$G(x) = E(x) - K(x) = -100x^2 + 10000x - (x^3 - 100x^2 + 3600x + 100000)$

$G(x) = -x^3 + 6400x - 100000$

$g'(x) = -3x^2 + 6400$

$x^2 = \frac{6400}{3} \Rightarrow \ x = 46{,}19$

$G(46{,}19) = 97069$

Bei einer Stückzahl von 46190 *Stück macht das Unternehmen den maximalen Gewinn von ca.* 97069 *US-Dollar.*

3.3 Um keinen Verlust zu machen, muss das Unternehmen mindestens seine Kosten decken.

Kosten pro Stück bei 4000 Stück: $\frac{K(4)}{4000} = \frac{112864}{4000} = 28{,}22$

Das Unternehmen müsste bei einem Absatz von 4000 Kugelschreibern mindestens $28{,}22$ US-Dollar pro Stück verlangen, damit es keinen Verlust macht.

Lösung A9

4.1 Dreifacher Kaninchenbestand:

Bestand zu Beginn der Beobachtung war 150 Kaninchen.

Dreifacher Bestand: 450 Kaninchen.

$450 = 1000 \cdot (1 - 0{,}85e^{-0{,}0153t}) = 1000 - 850e^{-0{,}0153t}$

$850e^{-0{,}0153t} = 550$

$e^{-0{,}0153t} = \frac{55}{85} = \frac{11}{17} \qquad | \qquad ln$

$-0{,}0153t = ln\left(\frac{11}{17}\right)$

$t = -\frac{ln\left(\frac{11}{17}\right)}{0{,}0153} = 8{,}49$

Nach ca. $8{,}49$ *Monaten hat sich der Anfangsbestand verdreifacht.*

Bestand nicht beliebig groß:

Die gegebene Funktion ist eine Funktion beschränkten Wachstums mit einer oberen Schranke von $S = 1000$.

4.2 Eine Änderungsrate ist die erste Ableitung der Bestandsfunktion.

$k(t) = 1000 - 850e^{-0{,}0153t}$

$k'(t) = 0{,}0153 \cdot 850e^{-0{,}0153t} = 43{,}605 \cdot e^{-0{,}0153t}$

Änderungsrate am größten:

Eine Änderungsrate ist in einem Wendepunkt am größten bzw. kleinsten. Da $k'(t)$ jedoch streng monoton fallend ist, hat $k(t)$ keine Wendepunkte. Der größte Wert von $k'(t)$ ist somit $k'(0) = 43{,}605$.

4.3 Mittlere Änderungsrate in den ersten fünf Monaten:

$\overline{m} = \frac{1}{5}\int_0^5 f'(t)dt = \frac{1}{5} \cdot \big(k(5) - k(0)\big) = \frac{1}{5} \cdot (342{,}3 - 150) = 38{,}46$

Die mittlere Änderungsrate in den ersten fünf Monaten beträgt etwa 38 *Kaninchen/Monat.*

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de