Lösung A10

2.1 $m(0) = 230$
$230 = a \cdot b^0 = a$
$m(20) = 144{,}89 = 230 \cdot b^{20}$
$b^{20} = \frac{144{,}89}{230}$ | $\sqrt[20]{}$
$b = 0{,}9772$
$m(t) = 230 \cdot b^{0{,}9772t}$

2.2 $m_c(32) = 230 \cdot e^{-0{,}023 \cdot 32} \approx 110{,}18$
Prozentualer Anteil: $\frac{110{,}18}{230} = 0{,}479 = 47{,}9\,\%$
Im Jahr 2018 sind nach diesem Modell noch etwa der ursprünglichen Menge an Cäsium-137 vorhanden.
$1\,\%$ der ursprünglichen Menge:
$0{,}01 = e^{-0{,}023t}$ | ln
$-0{,}023t = ln(0{,}01)$
$t = -\frac{ln(0{,}01)}{0{,}023} \approx 200{,}22$
Im Laufe des Jahre 2186 wird noch $1\,\%$ an Cäsium-137 vorhanden sein.

2.3.1 Der steile Anstieg des Schaubilds bis zum Hochpunkt (bei) zeigt, dass Plutonium-241 vergleichsweise schnell in Americum-241 zerfällt. Danach fällt die Kurve flacher ab, was bedeutet, dass Americum-241 sehr viel langsamer zerfällt als Plutonium-241.

2.3.2 Die Wertetabelle des WTR liefert:
$m_A(70) = 172{,}6$
$m_A(73) = 172{,}6$
Alle Tabellenwerte von $t = 71$ bis $t = 72$ sind etwa gleich, somit liegt die Maximalstelle bei $t = 71{,}5$
$m_A(71{,}5) = 172{,}61$
$198 + 71{,}5 = 2057{,}5$; also im Laufe des Jahres 2057.

Lösung A11

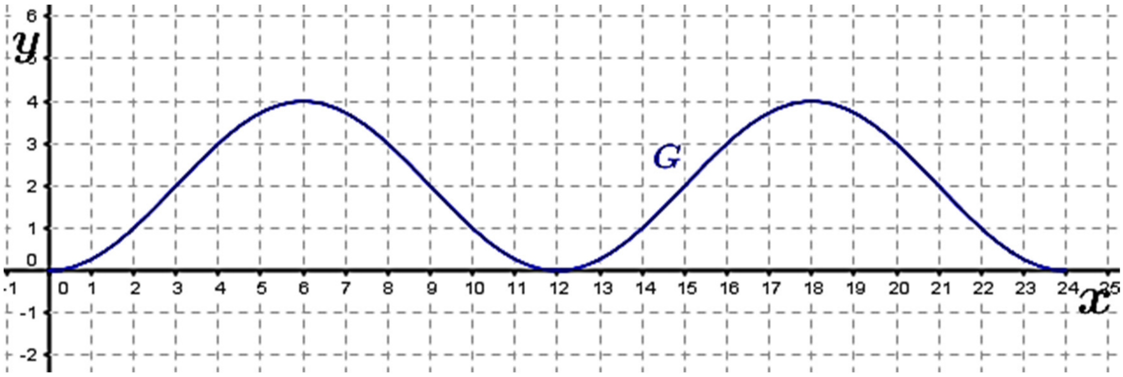
3.1 Für die ersten $10\,GE$ fallen keine Steuer an. Die darauffolgenden $10\,GE$ werden im Schnitt mit $20\,\%$ besteuert. $20\,\%$ ist der Mittelwert von $10\,\%$ und $30\,\%$. Das entspricht $2\,GE$ Steuern. Die restlichen $20\,GE$ werden im Durchschnitt mit $32{,}5\,\%$ vesteuert. Das ist der Mittelwert von $30\,\%$ und $35\,\%$. Das entspricht $6{,}5\,GE$ Steuern.
Insgesamt fallen somit bei einem Jahreseinkommen von $40\,000\,€$ Steuern in Höhe von $8\,500\,€$ an.
Der Durchschnittssteuersatz beträgt $\frac{8500}{40000} = 0{,}2125 = 21{,}25\,\%$.

3.2 Da stets die ersten $60\,000\,€$ eines Jahreseinkommens mit einem geringeren Grenzsteuersatz als $40\,\%$ besteuert werden und somit erst der Teil über $60\,000\,€$ mit dem Grenzsteuersatz von $40\,\%$ besteuert wird, der Durchschnittsteuersatz sich aber aus beiden Teilen zusammensetzt, wird derselbe deshalb stets unter $40\,\%$ liegen.

3.3 Aus der Grafik ermitteln wir:
$\frac{1600+40(x60)}{x} = 28$ | $\cdot x$
$1600 + 40x - 2400 = 28x \Longrightarrow \; x = 66{,}67$
Bei einem Einkommen von $66\,667\,€$ ist der Durchschnittsteuersatz $28\,\%$.

Lösung A12

4.1



4.2 $V = 50 \cdot \int_0^{24} \left(-2\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2\right) dx = \left[-\frac{12}{\pi} sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2x\right]_0^{24} \approx 50 \cdot 48 = 2400$

Zum Aufschütten der Wälle werden $2400\,m^3$ Erde benötigt.

4.3 Eine Steigung ist am größ0ten in einem Wendepunkt mit positiver Steigung. Dieser Wendepunkt liegt bei $x = 3$.

$g'(x) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

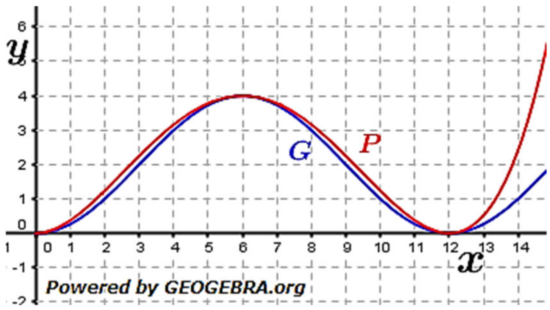
$g'(3) = \frac{12}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 1{,}05 = 105\,\%$

Die Aussage ist falsch. Die größte Steigung ist größer als $100\,\%$.

4.4 Einer Punktprobe mit $P(6|4)$ ergibt:

$4 = k \cdot 36(6-12)^2 = 1296k$

$k = \frac{4}{36 \cdot 36} = \frac{1}{324}$



Lösung A13

2.1 Zeit für letzte $50\,m$ des Laufs:

$t = 9{,}69 - 5{,}50 = 4{,}19$

Bolt benötigte $4{,}19\,s$ für die letzten $50\,m$ seines Laufs.

$40\,km/h$ möglich für einen Menschen?

$40\frac{km}{h} = \frac{40}{3{,}6}\frac{m}{s} = 11{,}11\frac{m}{s}$.

Da in der Tabelle auch Geschwindigkeiten größer als $11{,}11\frac{m}{s}$ vorkommen, kann ein Mensch auch mehr als $40\frac{km}{h}$ erreichen.

Maximale Geschwindigkeit von Bolt war $12{,}19\frac{m}{s}$ bei Erreichen der $80\,m$ Marke. Er hätte somit noch $20\,m$ mit dieser Geschwindigkeit zurücklegen müssen. Hieraus ergibt sich t für die letzten mit $t = \frac{s}{v} = \frac{20}{12{,}19} = 1{,}64\,s$.

Für die ersten $80\,m$ benötigte Bolt $7{,}96\,s$. $7{,}96 + 1{,}64 = 9{,}6\,s$.

Bei gleichbleibender Geschwindigkeit auf den letzten $20\,m$ hätte Bolt $9{,}6\,s$ benötigt.

Anwendungsorientierte Analysis Musteraufgaben (mit Hilfsmittel)

2.2 Maximale Geschwindigkeit von Bolt ist Maximum der gegebenen Funktion.
$v'(t) = 0{,}1146t^2 - 1{,}6316t + 5{,}4828$
$v'(5{,}4) = 0{,}014 > 0;\quad v'(5{,}5) = -0{,}02435 < 0;$
Wegen VZW von „+" nach „–"muss zwischen $t = 5{,}4\,s$ und $t = 5{,}5\,s$ ein Hochpunkt vorliegen, also maximale Momentangeschwindigkeit von Bolt.

2.3 Wie lange benötigte Bolt drei Sekunden nach dem Start für die darauffolgenden $50\,m$.

Lösung A14

3.1 Motorboot = x; dann ist Tretboot = $2x$ und Elektroboot = y.
Wir erhalten nachfolgendes LGS:
(1) $x + 2x + y = 48$
$3x + y = 48 \implies y = 48 - 3x$
(2) $x \cdot 35 + 2x \cdot 10 + y \cdot 25 = 980$
$55x + 25y = 980$
$y \longrightarrow$(2)
(2) $55x + 25(48 - 3x) = 980$
$-20x + 1200 = 980$
$20x = 220$
$x = 11$
Der Verleih hat 11 Motorboote, 22 Tretboote und 15 Elektroboote.

3.2 Es sind insgesamt $x + y + z = 25$ Boote ausgeliehen. Die Einnahmen aus dieser Ausleihung betragen $35x + 25y + 10z = 525$ €.
Aus der in die Dreiecksform umgeformten Matrix lesen wir ab, dass es unendlich viele Lösungen gibt.
Zur Aufstellung des Lösungsvektors wählen wir eine Unbekannte frei, z. B. $z = t$ und erhalten
$y + 2{,}5t = 35 \implies y = 35 - 2{,}5t$
$x - 1{,}5t = -10 \implies x = -10 + 1{,}5t$
Für t kommen nur positive Werte in Betracht, es gibt keine negativen Tretboote. Hieraus folgt:
$z = t \geq 0$
$x = -10 + 1{,}5t \geq 0$ für $t \geq 6{,}\overline{6}$
$y = 35 - 2{,}5t \geq 0$ für $0 \leq t \leq 14$
Alle Bedingungen werden eingehalten, wenn t im Intervall $I = [6{,}\overline{6}; 14]$ liegt. Außerdem müssen x, y und z ganzzahlig sein. Es können also nur die ganzzahligen t-Werte 7 bis 14 vorkommen. Weiterhin müssen auch x und y ganzzahlig sein, sodass nur die t-Werte $t = 8$, $t = 10$, $t = 12$ bzw. $t = 14$ auf ganzzahlige Werte für x und y führen.
Da in der Aufgabe gefragt ist, wie viele Motorboote mindestens unterwegs sind, ist das t gesucht, welches für x die kleinste Zahl ergibt.
$x = -10 + 1{,}5t$ führt für $t = 8$ zum kleinsten Wert:
$x = -10 + 1{,}5 \cdot 8 = 2$
Es müssen also mindestens 2 Motorboote unterwegs sein.

Lösung A15

4.1 Eine Regression mit dem WTR führt zu $I(t) = 12{,}008 \cdot e^{-0{,}289t}$

4.2 Momentane Änderungsrate über $I'(t) = -0{,}289 \cdot 12{,}008 \cdot e^{-0{,}289t}$.
Mittlere Änderungsrate im Zeitraum von $1{,}0\,s$ bis $2{,}4\,s$:
$\overline{m} = \frac{f(2{,}4)-f(1)}{2{,}4-1} = \frac{6{,}001-8{,}994}{1{,}4} = -2{,}14.$
$-2{,}14 = -3{,}470312 \cdot e^{-0{,}289t} \quad | \quad : -3{,}470312$
$e^{-0{,}289t} = 0{,}6167 \quad | \quad ln$
$-0{,}289t = ln(0{,}6167)$
$t = 1{,}6725$
Etwa $1{,}68\,s$ nach Beobachtungsbeginn ist die momentane Änderungsrate etwa gleich groß wie die mittlere Änderungsrate von $1{,}0\,s$ bis $2{,}4\,s$.

4.3.1 Ladung in den ersten 18 Sekunden:
$Q = \int_0^{18} I(t)\,dt = \int_0^{18} 12{,}008 \cdot e^{-0{,}289t} = \left[-\frac{12{,}008}{0{,}289} e^{-0{,}289t}\right]_0^{18} = -\frac{12{,}008}{0{,}289} e^{-5{,}202} + \frac{12{,}008}{0{,}289}$
$Q = -0{,}2288 + 41{,}55 = 41{,}32$
In den ersten 18 Sekunden beträgt die Ladung etwa $41{,}32\,mAs$.

4.3.2 Die Zeit, nach welcher der Kondensator $60\,\%$ der Ladung trägt, sei x.
Die Auflösung der Gleichung $0{,}6 \cdot 41{,}32 = \int_0^x I(t)\,dt$ nach x gibt die gesuchte Zeit in Sekunden an.

Lösung A16

2.1 Die Gesamtkosten werden mit steigender Produktionszahl dann immer größer, wenn $K(x)$ keine Extremstellen besitzt und monoton steigend ist.
$K'(x) = 3x^2 - 20x + 40$
$3x^2 - 20x + 40 = 0 \quad | \quad :3$
$x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{40}{3} = 0$
$x_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} - \frac{120}{9}}$
Wegen $\frac{100}{9} - \frac{120}{9} < 0$ ist $\mathbb{L} = \{\}$
Für $x \longrightarrow \infty$ läuft $K(x) \longrightarrow \infty$, ist also streng monoton steigend.
$K(x)$ besitzt keine Extremstellen und ist streng monoton steigend, die Gesamtkosten werden mit steigender Produktionszahl immer größer.

2.2 $E(x) = 50x;\ \ G(x) = E(x) - K(x)$
$G(x) = 50x - x^3 + 10x^2 - 40x - 100 = -x^3 + 10x^2 + 10x - 100$
$G'(x) = -3x^2 + 20x + 10$
$G''(x) = -6x + 20$

$G'(x) = 0$:
$-3x^2 + 20x + 10 = 0 \qquad | \quad :-3$
$x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{10}{3} = 0$
$x_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{30}{9}} = 3{,}33 \pm 3{,}8$
$x_1 = 7{,}13;\ \ x_2 = -0{,}47$
$G''(7{,}13) = -6 \cdot 7{,}13 + 20 < 0 \Longrightarrow$ Hochpunkt (Maximum)
$G(7{,}13) = -7{,}13^3 + 10 \cdot 7{,}13^2 + 10 \cdot 7{,}13 - 100 = 117{,}20$
Der maximale Gewinn liegt bei $117{,}20$ *GE für* $7{,}13$ *produzierte und verkaufte ME.*

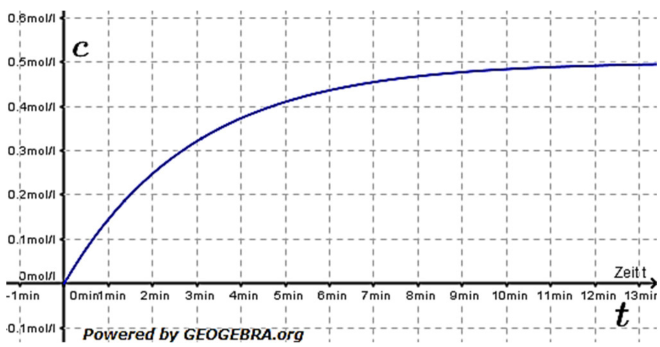
2.3 Der Vorschlag ist falsch. Mit Toms Vorschlag wird die Stelle mit der geringsten Steigung der Kostenfunktion ermittelt, also die Stelle, des momentanen geringsten Kostenzuwachses (Wendestelle).

Richtig ist, das Minimum der Stückkostenfunktion mit $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ zu ermitteln. Hier liegt das Betriebsoptimum bzw. die langfristige Preisuntergrenze.

Lösung A17

3.1 Für $c \longrightarrow \infty$ gilt $c(t) \longrightarrow 0{,}5$ (obere Schranke).

Die Konzentration nähert sich dem Wert $0{,}5\,\frac{mol}{l}$.



3.2 Reaktionsgeschwindigkeit entspricht der Steigung des Graphen von c. In obiger Grafik erkennen wir, dass die Steigung bei $t = 0$ maximal ist:
$c'(t) = 0{,}5 \cdot 0{,}343e^{-0{,}343t} = 0{,}1715e^{-0{,}343t}$
$c'(0) = 0{,}1715$
Die maximale Reaktionsgeschwindigkeit ist $0{,}1715\,\frac{mol}{l \cdot min}$.
Abbruch der Messung bei $c'(t) = 0{,}002$:
$0{,}002 = 0{,}1715e^{-0{,}343t} \qquad | \quad :0{,}1715$
$e^{-0{,}343t} = 0{,}0117 \qquad | \quad ln$
$-0{,}343t = ln(0{,}0117) \qquad | \quad :-0{,}343$
$t = \frac{\ln(0{,}0117)}{-0{,}343} = 12{,}97$
Nach etwa 13 *Minuten wird die Messung abgebrochen.*

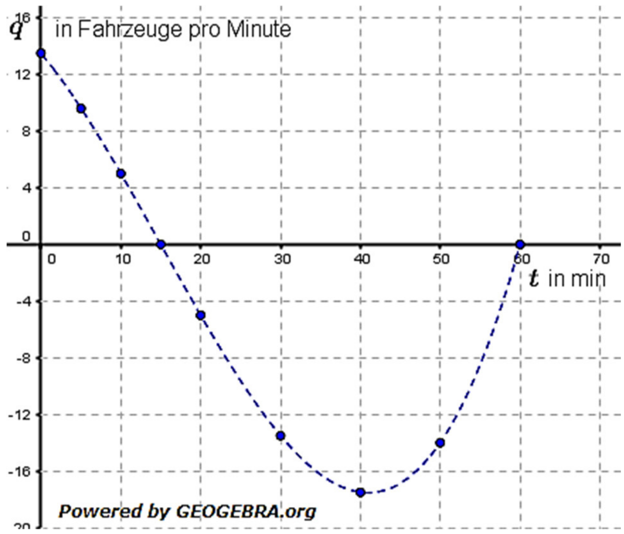
3.3 Mögliche Näherungsfunktionen (WTR):
Quadratische Regression: $q(t) = 0{,}39286t^2 - 4{,}97857t + 17{,}8$
Exponentielle Regression: $e(t) = 19{,}6327 \cdot 0{,}68237^t$ bzw.
$e(t) = 19{,}6327 \cdot e^{-0{,}3822t}$

Bewertung:
Wegen $r^2 = 0{,}9930$ für q bzw. $r^2 = 0{,}9940$ für e werden die Daten durch die Näherung sehr gut beschrieben.

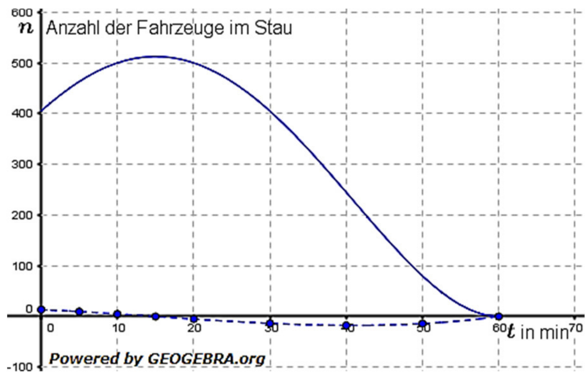
Lösung A18

4.1 In den ersten 15 Minuten wird der Stau länger ($q > 0$), danach nimmt seine Länge ab. Die Staulänge hat ihr Maximum nach 15 Minuten erreicht (q wechselt von $+$ nach $-$).

Nach 40 Minuten baut sich der Stau am schnellsten ab, da q hier minimal ist.



Zur Zeit $t = 0$ sind 405 Fahrzeuge im Stau. Bis $t = 15$ ist q positiv, d.h. die Anzahl der Fahrzeuge im Stau vergrößert sich. Ab $t = 15$ ist q neghativ, d.h. die Anzahl der Fahrzeuge im Stau verringert sich. Bei $t \approx 40$ ist ein Wendepunkt. Nach $t = 60$ hat sich der Stau aufgelöst.



4.2 Ansatz: $q(t) = a(t+30)((t-b)(t-c))$
b und c liest man über die Nullstellen $x_1 = 15$ und $x_2 = 60$ ab.
Zur Ermittlung von a machen wir eine Punktprobe mit $P(0|13{,}5)$.

$$q(t) = a(t+30)((t-15)(t-60))$$
$$13{,}5 = a(30)(-15)(60)$$
$$a = \frac{13{,}5}{27000} = \frac{1}{2000}$$
$$q(t) = \frac{1}{2000}(t+30)((t-15)(t-60))$$