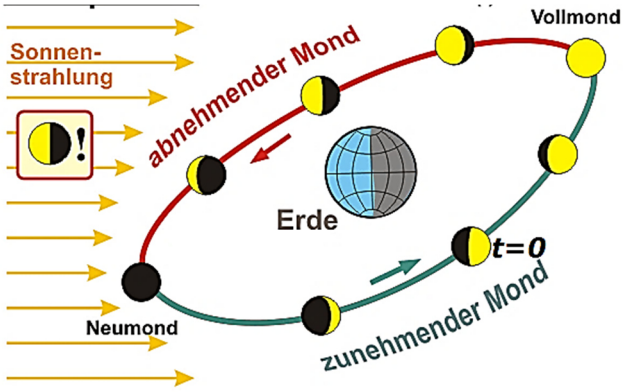
Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2 mit Hilfsmittel) 2017-2019

Aufgabe A2/2017

Im Verlauf von etwa 30 Tagen ändert der Mond beständig sein Erscheinungsbild. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei zunehmender Halbmond (siehe Abbildung).



Der beleuchtete Anteil der erdzugewandten Seite des Mondes wird modellhaft durch die Funktion A mit

$$A(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right);\ \ 0 \le t \le 30$$

beschrieben. Dabei steht t für die Tage seit Bebachtungsbeginn, beispielsweise ist $t = 1$ das Ende des ersten Tages.
Bei Vollmond hat der beleuchtete Anteil den Wert 1.

2.1 Skizzieren Sie das Schaubild von A.
Formulieren Sie im Sachzusammenhang eine Frage, die durch Lösen der Gleichung $A(t) = 0{,}95$ beantwortet werden kann. (4P)

2.2 Ermitteln Sie den durchschnittlichen Anteil der von Beobachtngsbeginn bis zu Ende des fünfzehnten Tages beleuchtet wird. (4P)

2.3 Das Modell soll nun zu einem Modell abgeändert werden, sodass der Zeitpunkt $t = 0$ der Beleuchtung bei Vollmond entspricht. (2P)
Bestimmen Sie hierzu einen Wert für c, sodass die Funktion mit

$$B(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{15}t + c\right);\ \ 0 \le t \le 30$$

diesen Sachverhalt modelliert.

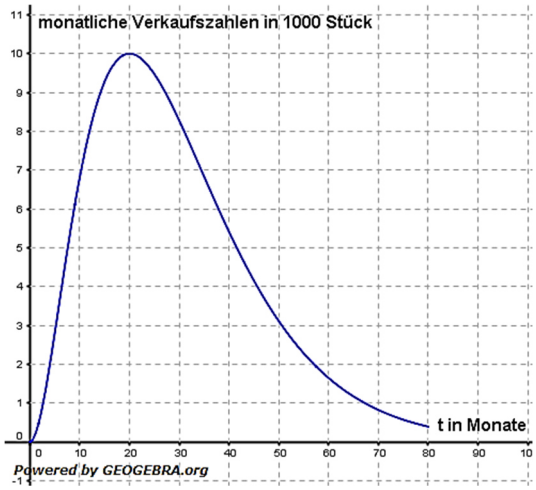
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2 mit Hilfsmittel) 2017-2019

Aufgabe A3/2017

Die folgende Abbildung zeigt die Modellierung eines sogenannten Produktionszyklus. Darin sind die monatlichen Verkaufszahlen V eines Produktes (z.B. PKW) in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt die Einführung des Produktes auf dem Markt. Nach sechs Jahren wird das Produkt vom Markt genommen.

Der Produktlebenszyklus wird lückenlos in vier Phasen unterteilt:



1. Einführungs- und Wachstumsphase
   - Zunahme der Verkaufszahlen
   - Zunahme der momentanen Änderungsrate der Verkaufszahlen.
2. Reifephase
   - Zunahme der Verkaufszahlen
   - Verkaufszahlen überschreiten $95\,\%$ des Maximums nicht
   - keine Zunahme der momentanen Änderungsrate der Verkaufszahlen
3. Sättigungsphase
   - Verkaufszahlen liegen über $95\,\%$ des Maximums
4. Degenerationsphase
   beginnt nach der Sättigungsphase

Die Aufgaben 3.1 und 3.2 sollen näherungsweise mit Hilfe der Abbildung gelöst werden.

3.1 Geben Sie für jede der vier Phasen das entsprechende Zeitintervall an. (4P)

3.2 Ermitteln Sie die Anzahl der verkauften Produkte in den gesamten sechs Jahren. (2P)

3.3 Im Folgenden ist V die Funktion der monatlichen Verkaufszahlen in Abhängigkeit von der Zeit t. Formulieren Sie jeweils einen mathematischen Ansatz, um folgende Fragen mithilfe von V bestimmen zu können: (4P)

(1) In welchem Zeitraum liegen die monatlichen Verkaufszahlen über 3000 Stück und weisen keinen Rückgang auf?

(2) In welchem dreimonatigen Zeiträumen liegt die Gesamtverkaufs-Zahl bei 40000 ?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2 mit Hilfsmittel) 2017-2019

Aufgabe A4/2017

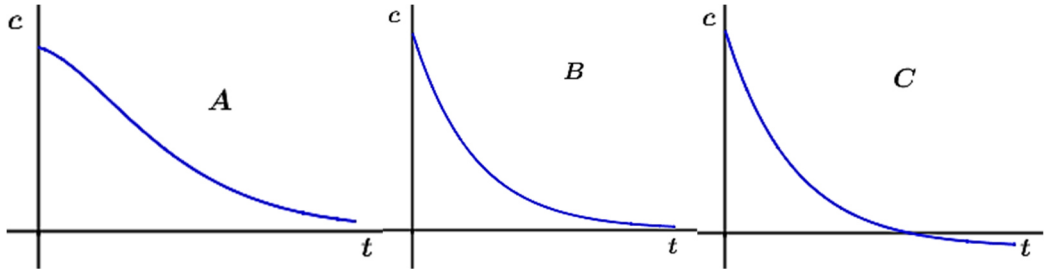
In Schulversuchen wird die Lösung eines chemischen Stoffes mit Salzsäure versetzt. Dadurch zerfällt der Stoff und dessen Konzentration c sinkt im Laufe der Zeit t.
v ist die momentane Änderungsrate der Konzentration c.

Im Folgenden sind c in Mol pro Liter $\left(\frac{mol}{l}\right)$ und die Zeit t in Sekunden (s) angegeben.

4.1 in einem ersten Versuch wird die Konzentration c in Abängigkeit von t modelliert durch $c(t) = 0{,}05 \cdot e^{-0{,}017t};\ t \geq\ 0$.

4.1.1 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem nur noch $10\,\%$ der Anfangskonzentration vorhanden sind. (4P)
Geben Sie den Wert von v drei Minuten nach Versuchsbeginn an.
In welcher Einheit wird v gemessen?

4.1.2 Eine der unten stehenden drei Abbildungen zeigt das Schaubild der Funktion c. Entscheiden Sie welche. Erläutern Sie, warum die beiden anderen Schaubilder nicht in Frage kommen. (2P)



4.2 Unter anderen Bedingungen berechnet sich die momentane Änderungsrate v zum Zeitpunkt t durch (4P)

$$v(t) = -0{,}007 \cdot e^{-0{,}07t};\ t \geq\ 0.$$

Die Anfangskonzentration des Stoffes ist dann $0{,}125\,\frac{mol}{l}$.
Bestimmen Sie, wie viel Prozent der Anfangskonzentration langfristig übrig bleibt.

Aufgabe A2/2018

Um Zugvögel beim Fliegen zu beobachten setzen Forscher spezielle, sehr leichte Drohnen ein. Die Drohne startet vom Boden aus und fliegt nach starker Beschleunigung hinter den Vögeln her. Die Geschwindigkeit der Drohne kann modellhaft durch die Funktion v mit

$$v(t) = 25 - 25 \cdot e^{-0{,}0322t}$$

beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Sekunden (s) seit dem Start der Drohne ($t = 0$).
$v(t)$ gibt die Geschwindigkeit in $\left(\frac{m}{s}\right)$ zum Zeitpunkt t an.

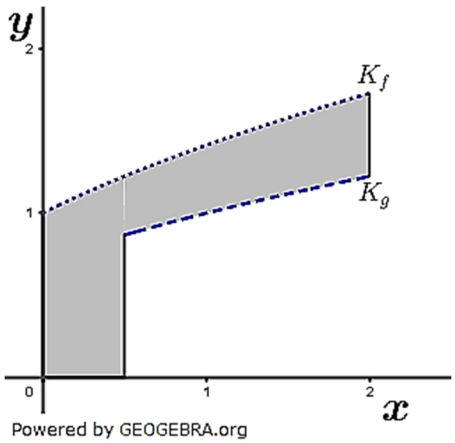
2.1 Zeichnen Sie das Schaubild von v für $0 \leq t \leq 100$.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde, an die sich die Geschwindigkeit der Drohne nach diesem Modell annähert. (4P)

2.2 Berechnen Sie $\int_0^{50} v(t)dt$.
Interpretieren Sie das Integral im Sachzusammenhang. (3P)

2.3 Die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit entspricht der Beschleunigung dieser Drohne.
Begründen Sie, dass die Drohne beim Start die größte Beschleunigung hat.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem die Beschleunigung geringer als $0{,}5\frac{m}{s^2}$ ist. (3P)

Aufgabe A3/2018

3 Für eine Gartenschau sollen verschiedene Pflanzenkübel mit einer Höhe von jeweils 2 Meter aus Kunststoff gegossen werden. Die Abbildung unten zeigt beispielhaft den halben Querschnitt eines um $90\,°$ gekippten Pflanzenkübels mit seinem Pflanzeinsatz.
Der Kübel wird durch Rotation der grauen Fläche um die x-Achse beschrieben.
Die Mantelfläche des Kübels wird hierbei mit Hilfe des Schaubilds K_f der Funktion f erzeugt (in der Abbildung gepunktet).
Analog wird die Mantelfläche des Pflanzeinsatzes mit Hilfe des Schaubilds K_g der Funktion g erzeugt (in der Abbildung gestrichelt). Alle Angaben sind in Meter (m).



3.1 Zur Modellierung eines bestimmten Pflanzenkübels werden die Funktionen f und g mit $f(x) = \sqrt{x+1};\ 0 \leq x \leq 2$ und $g(x) = \sqrt{0{,}5x + 0{,}5};\ 0{,}5 \leq x \leq 2$ verwendet.
Dieser Pflanzenkübel wird aus Kunststoff der Dichte $0{,}9$ Tonnen pro Kubikmeter gefertigt.
Berechnen Sie die Masse dieses Pflanzkübels in Tonnen. (5P)

3.2 Für einen anderen Pflanzenkübel wird die Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1;\ 0 \leq x \leq 2$ verwendet.
Prüfen Sie, ob es Werte für a und b gibt, sodass in einer Höhe von $2\,m$ der Radius des Pflanzenkübels $1{,}5\,m$ ist und der kleinste Radius in einer Höhe von $1\,m$ vorliegt. (5P)

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2 mit Hilfsmittel) 2017-2019

Aufgabe A4/2018

4 Ein Wetterballon startet auf Meereshöhe und sendet mit ansteigender Höhe Daten des entsprechenden Luftdrucks. Bei seinem Flug wird der vom Ballon gemessene Luftdruck p in hPa (Hektopascal) in Abhängigkeit von der Höhe h (in km) näherungsweise durch die Funktion p mit
$p(h) = 1013 \cdot e^{-0,126 \cdot h}; 0 \leq h \leq 11$ modelliert.

4.1 Bestimmen Sie den Luftdruck auf Meereshöhe.
Ermitteln Sie die Höhe bei der ein Luftdruck von 787 hPa gemessen wird. (3P)

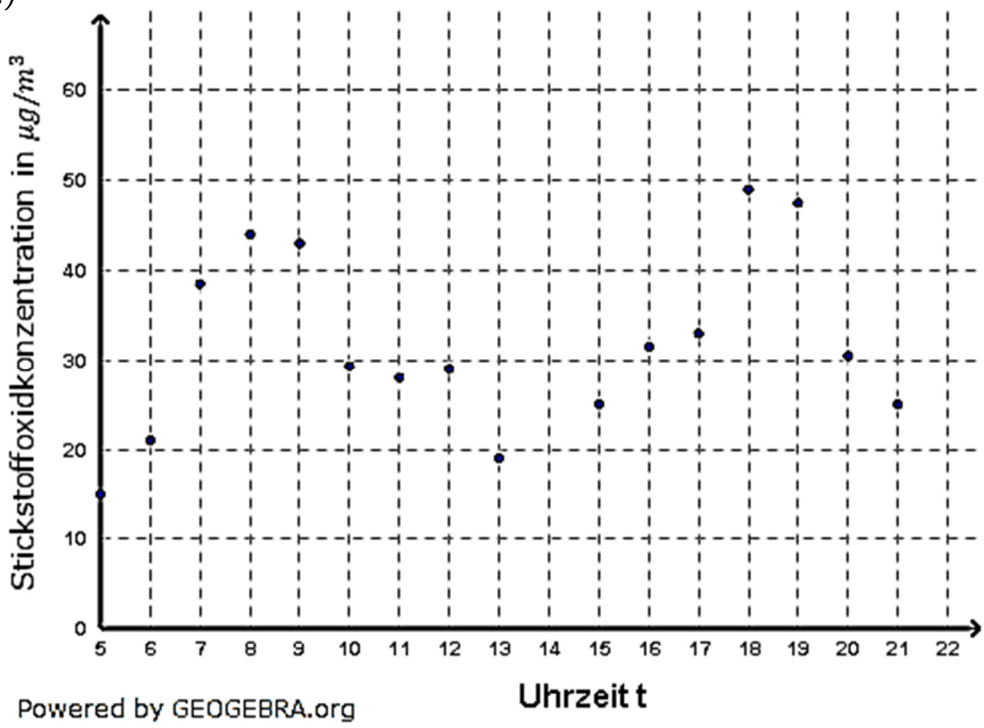
4.2 Bestimmen Sie die prozentuale Abnahme des Luftdrucks, wenn die Höhe um einen Kilometer zunimmt. (2P)

4.3 Berechnen Sie den mittleren Wert des Luftdrucks, dem der Ballon bei seinem Aufstieg von Meereshöhe bis auf 11 km Höhe ausgesetzt ist. (3P)

4.4 Interpretieren Sie die folgende Näherungsformel im Sachzusammenhang:
$p(h + 5,5) \approx \frac{p(h)}{2}; 0 \leq h \leq 5,5.$ (2P)

Aufgabe A2/2019

Ein großer Anteil des Stockstoffoxids (NO_2) in der Luft wird durch Verbrennungsmotoren im Straßenverkehr erzeugt. An einer Messstation in einer süddeutschen Stadt wird die NO_2-Konzentration in der Luft täglich aufgezeichnet. Die Abbildung zeigt die, an einem Werktag im Herbst zwischen 5 Uhr morgens und 21 Uhr abends gemessenen NO_2-Datenwerte in Mikrogramm pro Kubikmeter Luft $\left(\frac{\mu g}{m^3}\right)$.



2.1 Beschreiben Sie die Entwicklung der NO_2-Konzentration im Tagesverlauf und interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang. (2P)

2.2 Die Funktion f mit $f(t) = 15 \cdot sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right) + 30;\ 5 \leq t \leq 21$ modelliert den Wert der NO_2-Konzentration $f(t)$ in $\frac{\mu g}{m^3}$ zum Zeitpunkt dieses Tages.

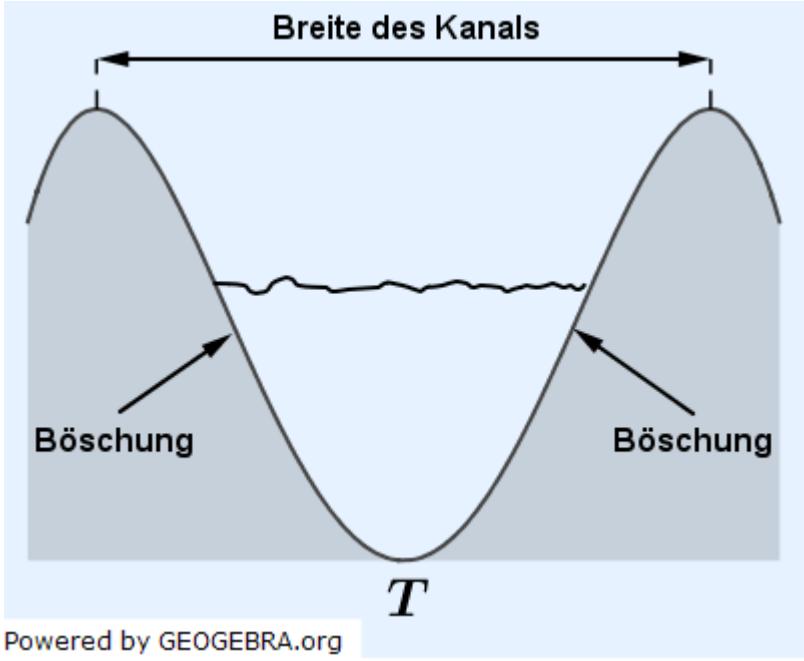
2.2.1 Beurteilen Sie folgende Aussage: „Das Maximum von f weicht vom tatsächlich gemessenen maximalen Wert der NO_2-Konzentration um mehr als $10\,\%$ ab." (2P)

2.2.2 Bestimmen Sie unter Verwendung des Modells f die beiden Zeitpunkte, an denen die Zunahme der NO_2-Konzentration am größten ist. (3P)

2.2.3 Zum Zeitpunkt der Messung galt für die NO_2-Konzentration in der Luft der Grenzwert von $40\ \frac{\mu g}{m^3}$.
Bestimmen Sie mithilfe von f die Uhrzeit auf die Minute genau, zu der dieser Grenzwert erstmals erreicht wurde. (3P)

Aufgabe A3/2019

Ein Ingenieurbüro plant den Bau eines 15 Meter (m) langen, geraden Kanals, der einen gleichbleibenden Querschnitt aufweist. Das Koordinatensystem wird im Modell so gelegt, dass $T(0|0)$ den tiefsten Punkt des Querschnitts darstellt (siehe Abbildung). Die Randkurve des Querschnitts wird beschrieben durch die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{4}x^2$, wobei x im Bereich der Breite des Kanals liegt und ebenso wie $f(x)$ in Meter gemessen wird. Die Abbildung stellt eine nicht maßstabsgetreue Skizze des Schaubilds von f dar.



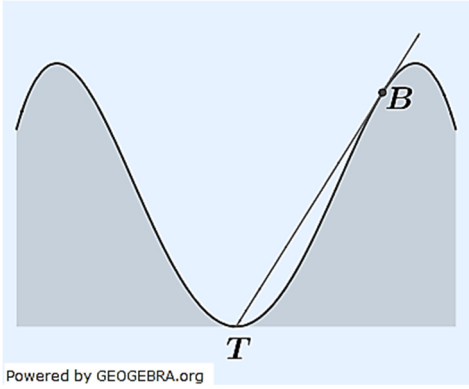
3.1 Berechnen Sie den höchstmöglichen Wasserstand und die Breite des Kanals. (3P)

3.2 Das Wasser steht im Kanal $2\,m$ hoch.

3.2.1 Zeigen Sie, dass der Wasserspiegel eine Breite von genau $4\,m$ einnimmt. (1P)

3.2.2 Berechnen Sie den Wert von $15 \cdot \int_{-2}^{2} \left(2 - f(x)\right) dx$.
Deuten Sie diesen Term und den berechneten Wert im Sachzusammenhang. (3P)

3.3 Ein Laser in der Position T wird so eingestellt, dass er einen Laserstrahl erzeugt, der in der Ebene des Kanalquerschnitts verläuft und dabei die rechte Böschung an einem Punkt $B\left(u \middle| f(u)\right)$ mit $u > 0$ berührt.
Bestimmen Sie die Steigung a der Geraden mit der Gleichung $y = a \cdot x$, die diesen Lichtstrahl modelliert. (3P)



Aufgabe A4/2019

Ein Unternehmen bietet seinen Kunden für eine kurze Testphase ein neues Produkt an. Für den nächsten Produktionszeitraum sind maximal 9 Mengeneinheiten (ME) des Produkts geplant.
Der Verkaufspreis je Mengeneinheit wird mit 10 Geldeinheiten (GE) kalkuliert.
Der erzielte Erlös ist das Produkt aus dem Verkaufspreis und der Menge.
Die Gesamtkosten können durch die Funktion K mit der Funktionsgleichung

$$K(x) = 0{,}2x^3 - x^2 + 4x + 8$$

beschrieben werden, mit x in ME, K in GE.
Der Gewinn wird berechnet als Differenz aus dem Erlös und den Gesamtkosten.

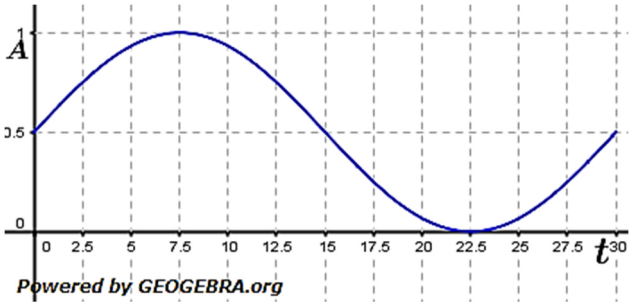
4.1 Zeichnen Sie das Schaubild der Erlös- und Gesamtkostenfunktion in ein gemeinsames Koordinatensystem. Markieren Sie darin die Gewinnzone, d.h. die Produktionsmengen, für die kein Verlust gemacht wird. (4P)

4.2 Berechnen Sie den maximalen Gewinn. (4P)

4.3 Claus stellt fest, dass an der Stelle $x_1 = \frac{5}{3}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) $K''(x_1) = 0 \;\wedge\; K'''(x_1) \neq 0$,
(2) $K'(x_1) = \frac{7}{3}$.
Interpretieren Sie diese Bedingungen im Sachzusammenhang. (2P)

Lösung A2/2017

2.1 Schaubild siehe Grafik rechts.
Frage Sachzusammenhang:
Bestimmen Sie die Tage im Zyklus, an denen der beleuchtete Anteil der erdzugewandten Seite $95\,\%$ beträgt.



2.2 Es ist nach dem Durchschnitts-prozentsatz des Beleuchtungs-Anteils in den ersten 15 Tagen gefragt.

$$\overline{A_{0;15}} = \frac{1}{15} \cdot \int_0^{15} A(t)\,dt = \frac{1}{15} \cdot \left[\frac{1}{2}t - \frac{15}{2\pi} cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)\right]_0^{15}$$

$$\overline{A_{0;15}} = \frac{1}{15} \cdot \left(7{,}5 - \frac{15}{2\pi} \cdot cos(\pi) - \left(-\frac{15}{2\pi} cos(0)\right)\right) = \frac{1}{15} \cdot \left(7{,}5 + \frac{15}{2\pi} + \frac{15}{2\pi}\right)$$

$$\overline{A_{0;15}} = \frac{1}{15} \cdot \left(7{,}5 + \frac{15}{\pi}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = 0{,}8183$$

Der mittlere Beleuchtungsanteil in den ersten 15 Tagen beträgt etwa $81{,}8\,\%$.

2.3 Bei Vollmond ist der Beleuchtungsanteil $100\,\% = 1$. Somit muss der Sinusanteil der gegebenen Funktionsgleichung $B(t)$ den Wert $\frac{1}{2}$ annehmen.

$$\frac{1}{2} \cdot sin\left(\frac{\pi}{15}t + c\right) = \frac{1}{2} \implies sin\left(\frac{\pi}{15}t + c\right) = 1$$

$$\frac{\pi}{15}t + c = \frac{\pi}{2}$$

Wegen $t = 0$ ist $c = \frac{\pi}{2}$.

$$B(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sin\left(\frac{\pi}{15}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$B(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

Lösung A3/2017

3.1 *Einführungs- und Wachstumsphase:*
Im Intervall von t mit $I =]0; 5]$
Bei ca. $t = 5$ befindet sich der Wwendepunkt des Schaubildes, bei dem die momentane Änderungsrate maximal ist.
Reifephase:
Im Intervall von t mit $I =]5; 15]$
Die momentane Änderungsrate nimmt in diesem Zeitintervall ab und nach ca. 15 Monaten beträgt die monatliche Verkaufszahl 9500 (und damit $95\,\%$ der maximalen monatlichen Verkaufszahl von 10.000).
Sättigungsphase:
Im Intervall von t mit $I =]15; 25]$
In diesem Intervall liegen die Verkaufszahlen über $95\,\%$ des Maximums.
Degenerationsphase:
Im Intervall von t mit $I =]25; 72]$
Nach ca. 25 Monaten nehmen die monatliche Verkaufszahlen kontinuierlich ab, 72 Monate nach Einführungsbeginn endet der Produktionszyklus.

3.2 Die Anzahl der verkauften Produkte in den sechs Jahren (72 Moaten) entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Schaubild und der t-Achse. Durch Abzählen der Kästchen erhält man ca. $34{,}5$ Kästchen.

Jedes Kästchen entspricht 10 (Monate) $\cdot\, 10000$ (Stück/Monat)$= 100000$ Stück. Insgesamt wurden ca. $34{,}5 \cdot 10.000 = 345000$ Stück verkauft.

3.3 (1) Bestimmen Sie das Intervall, in dem $V(t) > 3000$ und $V'(t) > 0$.
(2) Berechnen Sie u für das gilt: $\int_u^{u+3} V(t)\,dt = 4000$.

Lösung A4/2017

4.1.1 *Zeitpunkt Anfangskonzentration:*

$c(0) = 0{,}05 \cdot e^0 = 0{,}05$

Davon $10\,\%$: $c(t_0) = 0{,}005$

$0{,}005 = 0{,}05 \cdot e^{-0{,}017 t_0}$

$0{,}1 = e^{-0{,}017 t_0} \quad | \quad ln$

$-0{,}017 t_0 = \ln(0{,}1) \quad | \quad : -0{,}017$

$t_0 = \frac{\ln(0{,}1)}{-0{,}017} \overset{\text{WTR}}{\approx} 135{,}45$

Nach $135{,}5$ Sekunden sind nur noch $10\,\%$ der Anfangskonzentration vorhanden.

Momentane Änderungsrate nach drei Minuten:

$v(t) = c'(t) = -0{,}017 \cdot 0{,}05 \cdot e^{-0{,}017t} = -0{,}00085 \cdot e^{-0{,}017t}$

$v(180) = -0{,}00085 \cdot e^{-0{,}017 \cdot 180} \overset{\text{WTR}}{\approx} 3{,}98545 \cdot 10^{-5}$

Die momentane Änderungsrate drei Minuten nachg Beobachtungsbeginn beträgt $3{,}98545 \cdot 10^{-5} \frac{mol}{l \cdot s}$.

4.1.2 Abbildung B zeigt das Schaubild der Funktion c.
Wegen $c(t) \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$ hat das Schaubild von c die waagrechte Asymptote $y = 0$. Wegen der e-Funktion wird keine der Ableitungen von c irgendwelche Nullstellen besitzen, also hat das Schaubild weder Extrempunkte noch Wendestellen.
Diese Bedingungen treffen nur auf Schaubild B zu.
Schaubild A:
Das Schaubild besitzt eine Wendestelle, dies ist bei der gegebenen Funktion c nicht möglich, siehe Erläuterung zu B.
Schaubild C:
Das Schaubild besitzt eine Nullstelle, dies ist bei der gegebenen Funktion c nicht möglich, siehe Erläuterung zu B.

4.2 $v(t) = -0{,}007 \cdot e^{-0{,}07t} \implies V(t) = \frac{0{,}007}{0{,}07} e^{-0{,}07t} + C = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}07t} + C$

$V(0) = 0{,}125$

$0{,}125 = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}07 \cdot 0} + C$

$0{,}125 = +0{,}1 + C$

$C = 0{,}025$

$V(t) = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}07t} + 0{,}025$

Wegen $0{,}1e^{-0{,}07t} \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$ bleiben langfristig $0{,}025 \frac{mol}{l}$ übrig.

$\frac{0{,}025}{0{,}125} = 0{,}2 = 20\,\%$

Langfristig bleiben etwa $20\,\%$ der Anfangskonzentration übrig.

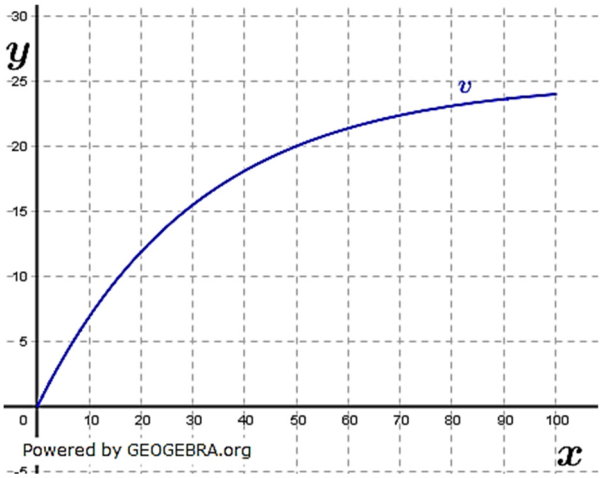
Lösung A2/2018

2.1 Schaubild siehe Grafik rechts.

Geschwindigkeitsannäherung:

Die gegebene Funktionsgleichung ist eine Funktion des beschränkten Wachstums mit einer oberen Schranke von 25.

Die Drohne nähert sich einer Geschwindigkeit von $25 \frac{m}{s} = 90 \frac{km}{h}$ an.



2.2 $\int_0^{50} v(t)dt = \int_0^{50} (25 - 25 \cdot e^{-0{,}0322t})\, dt.$

$= \left[25t + \frac{25}{0{,}0322} \cdot e^{-0{,}0322t}\right]_0^{50}$

$= 1405{,}2 - 776{,}4$

$= 628{,}8$

Interpretation des Sachzusammenhangs:

Das Integral über die Geschwindigkeit ergibt den zurückgelegten Weg.

Die Drohne legt in den ersten 50 Sekunden einen Weg von $628{,}8$ Metern zurück.

2.3 Größte Beschleunigung der Drohne:

$a(t) = v'(t) = -25 \cdot (-0{,}0322) \cdot e^{-0{,}0322t} = 0{,}805 \cdot e^{-0{,}0322t}$

Wegen $0 < e^{-0{,}0322t} \leq 1$ für $t \geq 0$ wird $0{,}805 \cdot e^{-0{,}0322t}$ immer kleiner für . Den größten Wert besitzt $e^{-0{,}0322t}$ zum Zeitpunkt $t = 0$, nämlich $e^{-0{,}0322 \cdot 0} = 1$.

Zeitpunkt mit $a < 0{,}5 \frac{m}{s^2}$:

$0{,}805 \cdot e^{-0{,}0322t} < 0{,}5 \quad | \quad : 0{,}805$

$e^{-0{,}0322t} < 0{,}6211 \quad | \quad ln$

$-0{,}0322t < \ln(0{,}6211) \quad | \quad : -0{,}0322$

$t > 14{,}79$

Nach etwa $14{,}8$ Sekunden hat die Drohne eine Beschleunigung von weniger als $0{,}5 \frac{m}{s^2}$.

Lösung A3/2018

3.1 Gewicht eines Kunststoffkübels:

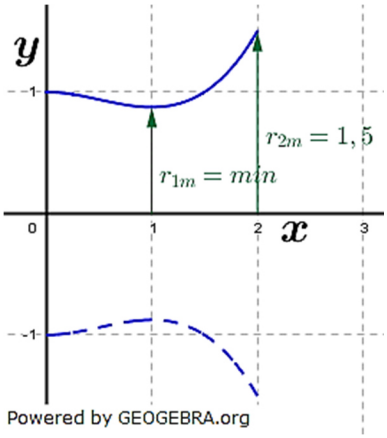
$$V_{Kübel} = \pi \cdot \int_0^{0,5} f(x)^2\,dx + \pi \cdot \int_{0,5}^{2} (f(x)^2 - g(x)^2)dx$$
$$= \pi \cdot \int_0^{0,5} (x+1)\,dx + \pi \cdot \int_{0,5}^{2} (x + 1 - (0,5x + 0,5)dx$$
$$= \pi \cdot \int_0^{0,5} (x+1)\,dx + \pi \cdot \int_{0,5}^{2} (0,5x + 0,5)dx$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^{0,5} + \pi \cdot \left[\frac{1}{4}x^2 + 0,5x\right]_{0,5}^{2}$$
$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 0\right) + \pi \cdot \left(1 + 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right)\right)$$
$$= \pi \cdot \left(\frac{5}{8} + \frac{27}{16}\right)$$
$$= \frac{37}{16}\pi \approx 7,26$$

$7,26\,m^3 \cdot 0,9\,\frac{t}{m^3} = 6,534\,t$

Der Kübel hat ein Gewicht von etwa 6,5 *Tonnen.*

3.2 *Anderer Pflanzkübel:*

Die nebenstehende Graphik verdeutlicht die Situation. Die Außenkontur des Pflanzkübels soll durch die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ für $0 \le x \le 2$ modelliert werden.



Hierzu benötigen wir zwei Bedingungen zur Berechnung von a und b. Diese sind:

$f(2) = 1,5$ sowie $f'(1) = 0 \wedge f''(1) > 0$

(1) $8a + 4b + 1 = 1,5$

(2) $3a + 2b = 0 \quad | \quad \cdot 2$

(1) $8a + 4b + 1 = 1,5$

(2) $\underline{6a + 4b = 0}$

(1)-(2) $2a + 1 = 1,5$

$2a = 0,5$

$a = \frac{1}{4}$

$a \to (2)$

$3 \cdot \frac{1}{4} + 2b = 0$

$2b = -\frac{3}{4}$

$b = -\frac{3}{8}$

Die Funktionsgleichung könnte lauten: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 1$ für $0 \le x \le 2$

$f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

$f''(1) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} > 0$

Bei $x_0 = 1$ liegt ein lokales Minimum vor mit $f(1) = \frac{7}{8}$.

Wir müssen noch prüfen, ob dieses Minimum für $0 \le x \le 2$ ein globales Minimum ist:

$f(0) = 1; \quad f(2) = 1,5$

Der Punkt $P\left(1 \middle| \frac{7}{8}\right)$ ist für $0 \le x \le 2$ ein globales Minimum.

Die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 1$ *die gestellten Bedingungen.*

Lösung A4/2018

4.1 *Luftdruck auf Meereshöhe:*

$p(0) = p(h) = 1013 \cdot e^{-0{,}126 \cdot 0} = 1013$

Der Luftdruck auf Meereshöhe beträgt $1013\ hPa$.

Höhe für $787\ hPa$:

$787 = 1013 \cdot e^{-0{,}126 \cdot h} \quad | \quad :1013$

$e^{-0{,}126 \cdot h} = 0{,}7769 \quad | \quad ln$

$-0{,}126 \cdot h = ln(0{,}7769) \quad | \quad :-0{,}126$

$h = 2$

In einer Höhe von etwa $2\ km$ *beträgt der Luftdruck* $787\ hPa$.

4.2 *Prozentualer Anteil der Abnahme:*

$e^{-0{,}126} = 0{,}8816 \approx 88{,}2\ \%$

$100\ \% - 88{,}2\ \% = 11{,}8\ \%$

Die prozentuale Abnahme für $1\ km$ *Höhenzunahme beträgt ca.* $11{,}8\ \%$.

4.3 *Mittlerer Luftdruck bei* $11\ km$ *Höhenunterschied:*

$\overline{p} = \frac{1}{11} \cdot \int_0^{11} p(h)\, dh = \frac{1}{11} \cdot \left[-\frac{1013}{0{,}126} \cdot e^{-0{,}126h}\right]_0^{11} = \frac{1}{11} \cdot (-2010 + 8039{,}7) = 548{,}11$

Der mittlere Luftdruck bei $11\ km$ *Höhenunterscheid beträgt ca.* $548\ hPa$.

4.4 $p(h + 5{,}5) \approx \frac{p(h)}{2}; 0 \leq h \leq 5{,}5$

Unabhängig auf welcher Höhe sich der Ballon befindet, gilt:

Der Luftdruck $5{,}5\ km$ *über der aktuellen Höhe ist etwa halb so groß wie in der aktuellen Höhe.*

Lösung A2/2019

2.1 *Entwicklung der* NO_2*-Konzentration im Tagesverlauf und Interpretation:*

Morgens zwischen *6:00* und *8:00* Uhr sowie nachmittags und in den frühen Abendstunden zwischen *15:00* und *18:00* Uhr steigt die NO_2-Konzentration sehr stark an und erreicht jeweils ihre maximalen Werte. Dies liegt höchstwahrscheinlich am Berufsverkehr der in diesen Zeiten stark zunimmt. Danach nahmen die Werte jeweils wieder ab, da dann der Berufsverkehr deutlich reduziert ist.

2.2.1 Beurteilung von *„Das Maximum von* f *weicht vom tatsächlich gemessenen maximalen Wert der* NO_2*-Konzentration um mehr als* $10\ \%$ *ab"*:

Das globale Maximum des vorgegebenen Schaubildes liegt bei etwa $49\ \frac{\mu g}{m^3}$ um $18{:}00$ Uhr.

Das Maximum von f liegt bei $45\ \frac{\mu g}{m^3}$ etwa um $18{:}30$.

Abweichung in %:

$p\% = \frac{45}{49} \cdot 100 = 91{,}84\ \%$

$100\ \% - 91{,}84\ \% = 8{,}16\ \%$

Das Maximum von f *weicht vom tatsächlich gemessenen maximalen Wert der* NO_2*-Konzentration um lediglich* $8{,}2\ \%$ *ab also weniger als* $10\ \%$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

2.2.2 *Zeitpunkte der größten Zunahme der NO_2-Konzentration am größten ist bei Modell f:*

Die größten Zunahmen sind in den Wendepunkten mit positiver Steigung. Bei einer unverschobenen Sinuskurve sind dies die Zeitpunkte $t_1 = 0$ und $t_2 = t_1 + p$.

Periode von f:

$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$

Die gegebene Funktion f ist in t-Richtung um $5{,}5$ $(\frac{11}{2})$ Stunden nach rechts verschoben. Somit sind die Zeitpunkte der größten Zunahme:

$t_1 = 5{,}5 \ \triangleq 5{:}30$ Uhr

$t_2 = t_1 + 10 = 15{,}5 \ \triangleq 15{:}30$ Uhr.

2.2.3 *Zeitpunkte für Bedingung $f(t) = 40$:*

$40 = 15 \cdot sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right) + 30 \quad | \quad +30; \ 15$

$\frac{2}{3} = sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right)$

Substitution: $u = \frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)$

$\frac{2}{3} = sin(u)$

$u_1 = arcsin\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}73$

Resubstitution:

$\frac{\pi}{5} \cdot \left(t_1 - \frac{11}{2}\right) = 0{,}73 \quad | \quad \cdot \frac{5}{\pi}; + \frac{11}{2}$

$t_1 = 6{,}67$

$t_1 = 6{,}67 \triangleq 6{:}40$ Uhr

Die Konzentration von $40 \ \frac{\mu g}{m^3}$ wurde erstmals um $6{:}40$ erreicht.

Lösung A3/2019

3.1 *Höchstmöglichen Wasserstand und die Breite des Kanals.*

Gesucht ist die y-Koordinate eines Hochpunktes sowie der Abstand der beiden Hochpunkte.

Hochpunkte über $f'(x) = 0 \ \wedge f''(x) < 0$

$f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x; \quad f''(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}$

$-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x = 0$

$x \cdot \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}\right) = 0 \quad | \quad$ Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2} = 0$

$x^2 = 6 \implies x_2 = \sqrt{6}; \ x_3 = -\sqrt{6}$

$x_1 = 0$ ist lokales Minimum, siehe Grafik.

$x_{2,3}$ sind die beiden lokalen Maxima, siehe Grafik.

$f(\sqrt{6}) = -\frac{1}{16} \cdot \sqrt{6}^4 + \frac{3}{4}\sqrt{6}^2 = 2{,}25$

$2 \cdot \sqrt{6} \approx 4{,}9$

Der höchstmöglichen Wasserstand liegt bei $2{,}25 \ m$, die Breite des Kanals beträgt etwa $4{,}9 \ m$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2 mit Hilfsmittel) 2017-2019

3.2.1 *Breite von $4\,m$ bei Wasserstand $2\,m$:*

Gesucht ist der Abstand der beiden inneren Schnittpunkte zwischen f und der Geraden mit $y = 2$.

$f \cap 2$:

$-\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{4}x^2 = 2$

$\frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 2 = 0 \qquad | \quad \cdot 16$

$x^4 - 12x^2 + 32 = 0$

$x_{1,2}^2 = +6 \pm \sqrt{36 - 32} = 6 \pm 2 \qquad | \quad p/q$-Formel

$x_1^2 = 8;\ \ x_1 = \sqrt{8};\ \ x_2 = -\sqrt{8}$

$x_2^2 = 4;\ \ x_3 = \sqrt{4} = 2;\ \ x_4 = -\sqrt{4} = -2$

Gesucht ist der Abstand der inneren Schnittpunkte, also der Abstand von x_3 und 4.

$2 \cdot 2 = 4$

Bei $2\,m$ Wasserstand beträgt die Kanalbreite $4\,m$, ***q.e.d.***.

3.2.2 *Wert von $15 \cdot \int_{-2}^{2}\big(2 - f(x)\big)\,dx$.*

$$15 \cdot \int_{-2}^{2}\big(2 - f(x)\big)\,dx = 15 \cdot \int_{-2}^{2}\left(2 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2\right)dx = 15 \cdot \left[2x + \frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{4}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$= 15 \cdot \left(4 + \frac{32}{80} - 2 - \left(-4 - \frac{32}{80} + 2\right)\right)$$

$$= 15 \cdot 4{,}8 = 72$$

$15 \cdot \int_{-2}^{2}\big(2 - f(x)\big)\,dx = 72$

Interpretation:

Der Wert 72 des Integrals entspricht dem Volumen des Kanals in m^3 bei einem Wasserstand von $2\,m$ Höhe auf einer Kanallänge von $15\,m$.

3.3 *Steigung a der Geraden $y = a \cdot x$:*

Gesucht ist die Funktionsgleichung einer Tangente an f im Punkt $B\big(u|f(u)\big)$ als Ursprungsgerade.

Tangentengleichung:

$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

$f'(u) = -\frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{2}u;\quad f(u) = -\frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2$

$t(x) = \left(-\frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{2}u\right) \cdot (x - u) - \frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2$

Durch Tangente verläuft durch $T(0|0)$

$\left(-\frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{2}u\right) \cdot (0 - u) - \frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2 = 0 \qquad |$ Punktprobe mit $T(0|0)$

$\frac{1}{4}u^4 - \frac{3}{2}u^2 - \frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2 = 0$

$\frac{3}{16}u^4 - \frac{3}{4}u^2 = 0 \qquad | \quad \cdot \frac{16}{3}$

$u^4 - 4u^2 = 0$

$u^2(u^2 - 4) = 0 \qquad |$ Satz vom Nullprodukt

$u_{1,2} = 0$

$u_{3,4} = \pm 2$

$u_{1,2} = 0$ ist Berührstelle der Geraden im Ursprung.

$u_3 = 2$ ist gesuchte Berührstelle an der rechten Böschung.

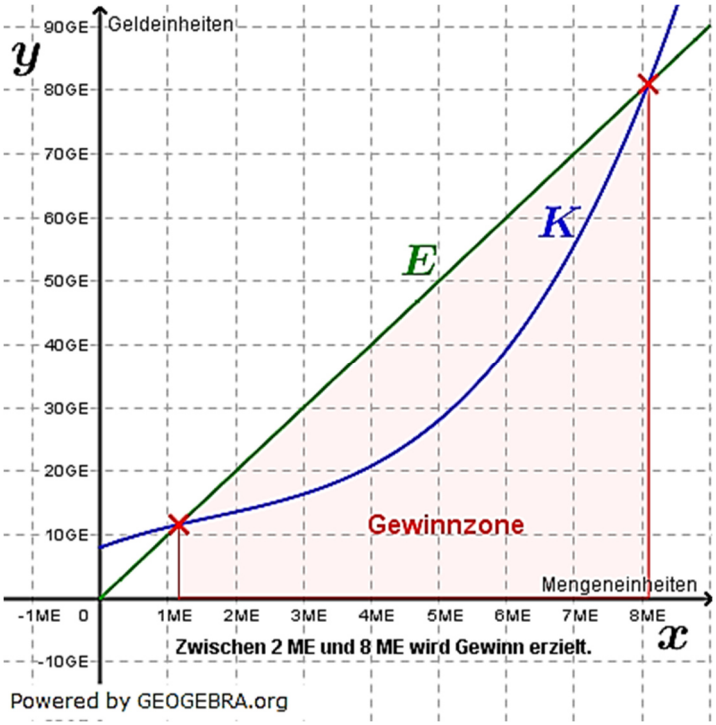
$u_3 = -2$ ist Berührstelle an der linken Böschung.

$f'(2) = -\frac{1}{4}2^3 + \frac{3}{2}2 = -2 + 3 = 1$

Die Tangente hat die Gleichung $y = x$, da die Steigung $a = 1$.

Lösung A4/2019

4.1 *Schaubild der Erlös- und Gesamtkostenfunktion.*



4.2 *Berechnung des maximalen Gewinns:*

$G(x) = E(x) - G(x)$

$E(x) = 10x$

$G(x) = 10x - (0{,}2x^3 - x^2 + 4x + 8) = -0{,}2x^3 + x^2 + 6x - 8$

Maximum über $G'(x) = 0$:

$G'(x) = -0{,}6x^2 + 2x + 6$

$-0{,}6x^2 + 2x + 6 = 0 \qquad | \quad \cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$

$x^2 - \frac{10}{3}x - 10 = 0$

$x_{1,2} = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{90}{9}} = \frac{5}{3} \pm \frac{1}{3} \cdot \sqrt{115}$

$x_1 = 5{,}24; \quad x_2 = -1{,}9$

$G''(x) = -1{,}2x + 2$

$G''(5{,}24) = -1{,}2 \cdot 5{,}24 + 2 < 0$

$x_1 = 5{,}24$ ist Maximum

$G(5{,}24) = -0{,}2 \cdot 5{,}24^3 + 5{,}24^2 + 6 \cdot 5{,}24 - 8 = 22{,}12$

Der maximale Gewinn beträgt $22{,}12\ GE$.

4.3 *Interpretation von Bedingungen:*

Die Bedingungen

(1) $K''(x_1) = 0 \ \wedge \ K'''(x_1) \neq 0$,

(2) $K'(x_1) = \frac{7}{3}$.

bedeuten, dass sich bei $x_1 = \frac{5}{3}\ ME$ ein Wendepunkt von K mit dem geringsten Kostenanstieg (momentane Änderungsrate) $\frac{7}{3}\ GE/ME$ befindet.