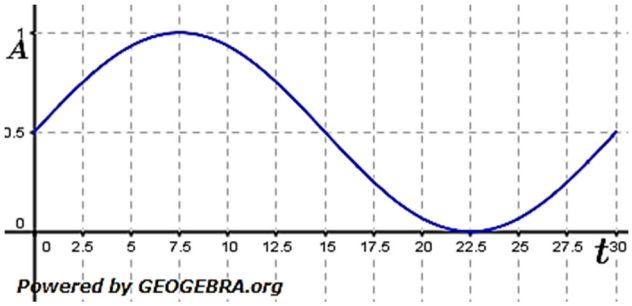
Lösung A2/2017

2.1 Schaubild siehe Grafik rechts.
Frage Sachzusammenhang:
Bestimmen Sie die Tage im Zyklus, an denen der beleuchtete Anteil der erdzugewandten Seite $95\,\%$ beträgt.



2.2 Es ist nach dem Durchschnittsprozentsatz des Beleuchtungs-Anteils in den ersten 15 Tagen gefragt.

$$\overline{A_{0;15}} = \frac{1}{15} \cdot \int_0^{15} A(t)\,dt = \frac{1}{15} \cdot \left[\frac{1}{2}t - \frac{15}{2\pi} cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)\right]_0^{15}$$

$$\overline{A_{0;15}} = \frac{1}{15} \cdot \left(7{,}5 - \frac{15}{2\pi} \cdot cos(\pi) - \left(-\frac{15}{2\pi} cos(0)\right)\right) = \frac{1}{15} \cdot \left(7{,}5 + \frac{15}{2\pi} + \frac{15}{2\pi}\right)$$

$$\overline{A_{0;15}} = \frac{1}{15} \cdot \left(7{,}5 + \frac{15}{\pi}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = 0{,}8183$$

Der mittlere Beleuchtungsanteil in den ersten 15 Tagen beträgt etwa $81{,}8\,\%$.

2.3 Bei Vollmond ist der Beleuchtungsanteil $100\,\% = 1$. Somit muss der Sinusanteil der gegebenen Funktionsgleichung $B(t)$ den Wert $\frac{1}{2}$ annehmen.

$$\frac{1}{2} \cdot sin\left(\frac{\pi}{15}t + c\right) = \frac{1}{2} \implies sin\left(\frac{\pi}{15}t + c\right) = 1$$

$$\frac{\pi}{15}t + c = \frac{\pi}{2}$$

Wegen $t = 0$ ist $c = \frac{\pi}{2}$.

$$B(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sin\left(\frac{\pi}{15}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$B(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

Lösung A3/2017

3.1 *Einführungs- und Wachstumsphase:*
Im Intervall von t mit $I =]0; 5]$
Bei ca. $t = 5$ befindet sich der Wwendepunkt des Schaubildes, bei dem die momentane Änderungsrate maximal ist.
Reifephase:
Im Intervall von t mit $I =]5; 15]$
Die momentane Änderungsrate nimmt in diesem Zeitintervall ab und nach ca. 15 Monaten beträgt die monatliche Verkaufszahl 9500 (und damit $95\,\%$ der maximalen monatlichen Verkaufszahl von 10.000).
Sättigungsphase:
Im Intervall von t mit $I =]15; 25]$
In diesem Intervall liegen die Verkaufszahlen über $95\,\%$ des Maximums.
Degenerationsphase:
Im Intervall von t mit $I =]25; 72]$
Nach ca. 25 Monaten nehmen die monatliche Verkaufszahlen kontinuierlich ab, 72 Monate nach Einführungsbeginn endet der Produktionszyklus.

3.2 Die Anzahl der verkauften Produkte in den sechs Jahren (72 Moaten) entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Schaubild und der t-Achse. Durch Abzählen der Kästchen erhält man ca. $34{,}5$ Kästchen.

Jedes Kästchen entspricht 10 (Monate) $\cdot\, 10000$ (Stück/Monat)$= 100000$ Stück. Insgesamt wurden ca. $34{,}5 \cdot 10.000 = 345000$ Stück verkauft.

3.3 (1) Bestimmen Sie das Intervall, in dem $V(t) > 3000$ und $V'(t) > 0$.
(2) Berechnen Sie u für das gilt: $\int_u^{u+3} V(t)\,dt = 4000$.

Lösung A4/2017

4.1.1 *Zeitpunkt Anfangskonzentration:*

$c(0) = 0{,}05 \cdot e^0 = 0{,}05$

Davon $10\,\%$: $c(t_0) = 0{,}005$

$0{,}005 = 0{,}05 \cdot e^{-0{,}017 t_0}$

$0{,}1 = e^{-0{,}017 t_0} \quad | \quad ln$

$-0{,}017 t_0 = \ln(0{,}1) \quad | \quad : -0{,}017$

$t_0 = \frac{\ln(0{,}1)}{-0{,}017} \overset{\text{WTR}}{\approx} 135{,}45$

Nach $135{,}5$ Sekunden sind nur noch $10\,\%$ der Anfangskonzentration vorhanden.

Momentane Änderungsrate nach drei Minuten:

$v(t) = c'(t) = -0{,}017 \cdot 0{,}05 \cdot e^{-0{,}017t} = -0{,}00085 \cdot e^{-0{,}017t}$

$v(180) = -0{,}00085 \cdot e^{-0{,}017 \cdot 180} \overset{\text{WTR}}{\approx} 3{,}98545 \cdot 10^{-5}$

Die momentane Änderungsrate drei Minuten nachg Beobachtungsbeginn beträgt $3{,}98545 \cdot 10^{-5} \frac{mol}{l \cdot s}$.

4.1.2 Abbildung B zeigt das Schaubild der Funktion c.
Wegen $c(t) \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$ hat das Schaubild von c die waagrechte Asymptote $y = 0$. Wegen der e-Funktion wird keine der Ableitungen von c irgendwelche Nullstellen besitzen, also hat das Schaubild weder Extrempunkte noch Wendestellen.
Diese Bedingungen treffen nur auf Schaubild B zu.
Schaubild A:
Das Schaubild besitzt eine Wendestelle, dies ist bei der gegebenen Funktion c nicht möglich, siehe Erläuterung zu B.
Schaubild C:
Das Schaubild besitzt eine Nullstelle, dies ist bei der gegebenen Funktion c nicht möglich, siehe Erläuterung zu B.

4.2 $v(t) = -0{,}007 \cdot e^{-0{,}07t} \implies V(t) = \frac{0{,}007}{0{,}07} e^{-0{,}07t} + C = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}07t} + C$

$V(0) = 0{,}125$

$0{,}125 = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}07 \cdot 0} + C$

$0{,}125 = +0{,}1 + C$

$C = 0{,}025$

$V(t) = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}07t} + 0{,}025$

Wegen $0{,}1e^{-0{,}07t} \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$ bleiben langfristig $0{,}025 \frac{mol}{l}$ übrig.

$\frac{0{,}025}{0{,}125} = 0{,}2 = 20\,\%$

Langfristig bleiben etwa $20\,\%$ der Anfangskonzentration übrig.

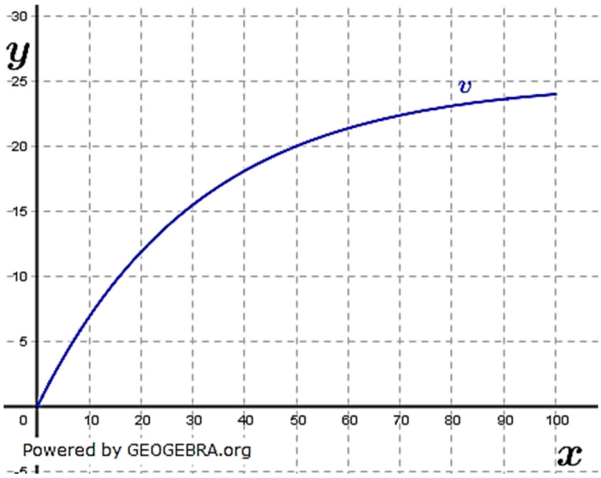
Lösung A2/2018

2.1 Schaubild siehe Grafik rechts.

Geschwindigkeitsannäherung:

Die gegebene Funktionsgleichung ist eine Funktion des beschränkten Wachstums mit einer oberen Schranke von 25.

Die Drohne nähert sich einer Geschwindigkeit von $25 \frac{m}{s} = 90 \frac{km}{h}$ an.



2.2 $\int_0^{50} v(t)dt = \int_0^{50} (25 - 25 \cdot e^{-0{,}0322t})\, dt.$

$= \left[25t + \frac{25}{0{,}0322} \cdot e^{-0{,}0322t}\right]_0^{50}$

$= 1405{,}2 - 776{,}4$

$= 628{,}8$

Interpretation des Sachzusammenhangs:

Das Integral über die Geschwindigkeit ergibt den zurückgelegten Weg.

Die Drohne legt in den ersten 50 Sekunden einen Weg von $628{,}8$ Metern zurück.

2.3 Größte Beschleunigung der Drohne:

$a(t) = v'(t) = -25 \cdot (-0{,}0322) \cdot e^{-0{,}0322t} = 0{,}805 \cdot e^{-0{,}0322t}$

Wegen $0 < e^{-0{,}0322t} \leq 1$ für $t \geq 0$ wird $0{,}805 \cdot e^{-0{,}0322t}$ immer kleiner für . Den größten Wert besitzt $e^{-0{,}0322t}$ zum Zeitpunkt $t = 0$, nämlich $e^{-0{,}0322 \cdot 0} = 1$.

Zeitpunkt mit $a < 0{,}5 \frac{m}{s^2}$:

$0{,}805 \cdot e^{-0{,}0322t} < 0{,}5 \quad | \quad : 0{,}805$

$e^{-0{,}0322t} < 0{,}6211 \quad | \quad ln$

$-0{,}0322t < \ln(0{,}6211) \quad | \quad : -0{,}0322$

$t > 14{,}79$

Nach etwa $14{,}8$ Sekunden hat die Drohne eine Beschleunigung von weniger als $0{,}5 \frac{m}{s^2}$.

Lösung A3/2018

3.1 Gewicht eines Kunststoffkübels:

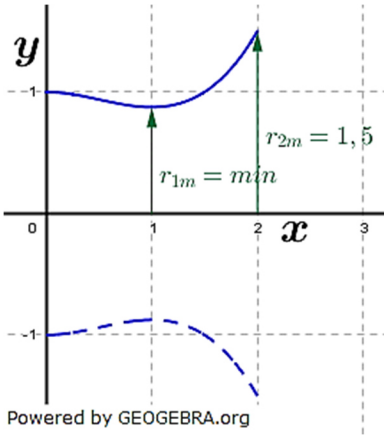
$$V_{Kübel} = \pi \cdot \int_0^{0,5} f(x)^2\,dx + \pi \cdot \int_{0,5}^{2} (f(x)^2 - g(x)^2)dx$$
$$= \pi \cdot \int_0^{0,5} (x+1)\,dx + \pi \cdot \int_{0,5}^{2} (x + 1 - (0,5x + 0,5)dx$$
$$= \pi \cdot \int_0^{0,5} (x+1)\,dx + \pi \cdot \int_{0,5}^{2} (0,5x + 0,5)dx$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^{0,5} + \pi \cdot \left[\frac{1}{4}x^2 + 0,5x\right]_{0,5}^{2}$$
$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 0\right) + \pi \cdot \left(1 + 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right)\right)$$
$$= \pi \cdot \left(\frac{5}{8} + \frac{27}{16}\right)$$
$$= \frac{37}{16}\pi \approx 7,26$$

$7,26\,m^3 \cdot 0,9\,\frac{t}{m^3} = 6,534\,t$

Der Kübel hat ein Gewicht von etwa 6,5 *Tonnen.*

3.2 *Anderer Pflanzkübel:*

Die nebenstehende Graphik verdeutlicht die Situation. Die Außenkontur des Pflanzkübels soll durch die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ für $0 \le x \le 2$ modelliert werden.



Hierzu benötigen wir zwei Bedingungen zur Berechnung von a und b. Diese sind:

$f(2) = 1,5$ sowie $f'(1) = 0 \wedge f''(1) > 0$

(1) $8a + 4b + 1 = 1,5$

(2) $3a + 2b = 0$ | $\cdot 2$

(1) $8a + 4b + 1 = 1,5$

(2) $\underline{6a + 4b = 0}$

(1)-(2) $2a + 1 = 1,5$

$2a = 0,5$

$a = \frac{1}{4}$

$a \to (2)$

$3 \cdot \frac{1}{4} + 2b = 0$

$2b = -\frac{3}{4}$

$b = -\frac{3}{8}$

Die Funktionsgleichung könnte lauten: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 1$ für $0 \le x \le 2$

$f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

$f''(1) = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} > 0$

Bei $x_0 = 1$ liegt ein lokales Minimum vor mit $f(1) = \frac{7}{8}$.

Wir müssen noch prüfen, ob dieses Minimum für $0 \le x \le 2$ ein globales Minimum ist:

$f(0) = 1;\quad f(2) = 1,5$

Der Punkt $P\left(1 \middle| \frac{7}{8}\right)$ ist für $0 \le x \le 2$ ein globales Minimum.

Die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 1$ *die gestellten Bedingungen.*

Lösung A4/2018

4.1 *Luftdruck auf Meereshöhe:*

$p(0) = p(h) = 1013 \cdot e^{-0{,}126 \cdot 0} = 1013$

Der Luftdruck auf Meereshöhe beträgt $1013\ hPa$.

Höhe für $787\ hPa$:

$787 = 1013 \cdot e^{-0{,}126 \cdot h} \quad | \quad :1013$

$e^{-0{,}126 \cdot h} = 0{,}7769 \quad | \quad ln$

$-0{,}126 \cdot h = ln(0{,}7769) \quad | \quad :-0{,}126$

$h = 2$

In einer Höhe von etwa $2\ km$ *beträgt der Luftdruck* $787\ hPa$.

4.2 *Prozentualer Anteil der Abnahme:*

$e^{-0{,}126} = 0{,}8816 \approx 88{,}2\ \%$

$100\ \% - 88{,}2\ \% = 11{,}8\ \%$

Die prozentuale Abnahme für $1\ km$ *Höhenzunahme beträgt ca.* $11{,}8\ \%$.

4.3 *Mittlerer Luftdruck bei* $11\ km$ *Höhenunterschied:*

$\overline{p} = \frac{1}{11} \cdot \int_0^{11} p(h)\, dh = \frac{1}{11} \cdot \left[-\frac{1013}{0{,}126} \cdot e^{-0{,}126h}\right]_0^{11} = \frac{1}{11} \cdot (-2010 + 8039{,}7) = 548{,}11$

Der mittlere Luftdruck bei $11\ km$ *Höhenunterscheid beträgt ca.* $548\ hPa$.

4.4 $p(h + 5{,}5) \approx \frac{p(h)}{2}; 0 \leq h \leq 5{,}5$

Unabhängig auf welcher Höhe sich der Ballon befindet, gilt:

Der Luftdruck $5{,}5\ km$ *über der aktuellen Höhe ist etwa halb so groß wie in der aktuellen Höhe.*

Lösung A2/2019

2.1 *Entwicklung der* NO_2*-Konzentration im Tagesverlauf und Interpretation:*

Morgens zwischen *6:00* und *8:00* Uhr sowie nachmittags und in den frühen Abendstunden zwischen *15:00* und *18:00* Uhr steigt die NO_2-Konzentration sehr stark an und erreicht jeweils ihre maximalen Werte. Dies liegt höchstwahrscheinlich am Berufsverkehr der in diesen Zeiten stark zunimmt. Danach nahmen die Werte jeweils wieder ab, da dann der Berufsverkehr deutlich reduziert ist.

2.2.1 Beurteilung von *„Das Maximum von* f *weicht vom tatsächlich gemessenen maximalen Wert der* NO_2*-Konzentration um mehr als* $10\ \%$ *ab"*:

Das globale Maximum des vorgegebenen Schaubildes liegt bei etwa $49\ \frac{\mu g}{m^3}$ um $18{:}00$ Uhr.

Das Maximum von f liegt bei $45\ \frac{\mu g}{m^3}$ etwa um $18{:}30$.

Abweichung in %:

$p\% = \frac{45}{49} \cdot 100 = 91{,}84\ \%$

$100\ \% - 91{,}84\ \% = 8{,}16\ \%$

Das Maximum von f *weicht vom tatsächlich gemessenen maximalen Wert der* NO_2*-Konzentration um lediglich* $8{,}2\ \%$ *ab also weniger als* $10\ \%$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

2.2.2 *Zeitpunkte der größten Zunahme der NO_2-Konzentration am größten ist bei Modell f:*

Die größten Zunahmen sind in den Wendepunkten mit positiver Steigung. Bei einer unverschobenen Sinuskurve sind dies die Zeitpunkte $t_1 = 0$ und $t_2 = t_1 + p$.

Periode von f:

$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$

Die gegebene Funktion f ist in t-Richtung um $5{,}5$ $(\frac{11}{2})$ Stunden nach rechts verschoben. Somit sind die Zeitpunkte der größten Zunahme:

$t_1 = 5{,}5 \ \triangleq 5{:}30$ Uhr

$t_2 = t_1 + 10 = 15{,}5 \ \triangleq 15{:}30$ Uhr.

2.2.3 *Zeitpunkte für Bedingung $f(t) = 40$:*

$40 = 15 \cdot sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right) + 30 \quad | \quad +30; \ 15$

$\frac{2}{3} = sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right)$

Substitution: $u = \frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)$

$\frac{2}{3} = sin(u)$

$u_1 = arcsin\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}73$

Resubstitution:

$\frac{\pi}{5} \cdot \left(t_1 - \frac{11}{2}\right) = 0{,}73 \quad | \quad \cdot \frac{5}{\pi}; + \frac{11}{2}$

$t_1 = 6{,}67$

$t_1 = 6{,}67 \triangleq 6{:}40$ Uhr

Die Konzentration von $40 \ \frac{\mu g}{m^3}$ wurde erstmals um $6{:}40$ erreicht.

Lösung A3/2019

3.1 *Höchstmöglichen Wasserstand und die Breite des Kanals.*

Gesucht ist die y-Koordinate eines Hochpunktes sowie der Abstand der beiden Hochpunkte.

Hochpunkte über $f'(x) = 0 \ \wedge f''(x) < 0$

$f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x; \quad f''(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}$

$-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x = 0$

$x \cdot \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}\right) = 0 \quad | \quad$ Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2} = 0$

$x^2 = 6 \implies x_2 = \sqrt{6}; \ x_3 = -\sqrt{6}$

$x_1 = 0$ ist lokales Minimum, siehe Grafik.

$x_{2,3}$ sind die beiden lokalen Maxima, siehe Grafik.

$f(\sqrt{6}) = -\frac{1}{16} \cdot \sqrt{6}^4 + \frac{3}{4}\sqrt{6}^2 = 2{,}25$

$2 \cdot \sqrt{6} \approx 4{,}9$

Der höchstmöglichen Wasserstand liegt bei $2{,}25 \ m$, die Breite des Kanals beträgt etwa $4{,}9 \ m$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2 mit Hilfsmittel) 2017-2019

3.2.1 *Breite von $4\,m$ bei Wasserstand $2\,m$:*

Gesucht ist der Abstand der beiden inneren Schnittpunkte zwischen f und der Geraden mit $y = 2$.

$f \cap 2$:

$-\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{4}x^2 = 2$

$\frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 2 = 0 \qquad | \quad \cdot 16$

$x^4 - 12x^2 + 32 = 0$

$x_{1,2}^2 = +6 \pm \sqrt{36 - 32} = 6 \pm 2 \qquad | \quad p/q$-Formel

$x_1^2 = 8;\ \ x_1 = \sqrt{8};\ \ x_2 = -\sqrt{8}$

$x_2^2 = 4;\ \ x_3 = \sqrt{4} = 2;\ \ x_4 = -\sqrt{4} = -2$

Gesucht ist der Abstand der inneren Schnittpunkte, also der Abstand von x_3 und 4.

$2 \cdot 2 = 4$

Bei $2\,m$ Wasserstand beträgt die Kanalbreite $4\,m$, ***q.e.d.***.

3.2.2 *Wert von $15 \cdot \int_{-2}^{2}\big(2 - f(x)\big)\,dx$.*

$$15 \cdot \int_{-2}^{2}\big(2 - f(x)\big)\,dx = 15 \cdot \int_{-2}^{2}\left(2 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2\right)dx = 15 \cdot \left[2x + \frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{4}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$= 15 \cdot \left(4 + \frac{32}{80} - 2 - \left(-4 - \frac{32}{80} + 2\right)\right)$$

$$= 15 \cdot 4{,}8 = 72$$

$15 \cdot \int_{-2}^{2}\big(2 - f(x)\big)\,dx = 72$

Interpretation:

Der Wert 72 des Integrals entspricht dem Volumen des Kanals in m^3 bei einem Wasserstand von $2\,m$ Höhe auf einer Kanallänge von $15\,m$.

3.3 *Steigung a der Geraden $y = a \cdot x$:*

Gesucht ist die Funktionsgleichung einer Tangente an f im Punkt $B\big(u|f(u)\big)$ als Ursprungsgerade.

Tangentengleichung:

$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

$f'(u) = -\frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{2}u;\quad f(u) = -\frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2$

$t(x) = \left(-\frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{2}u\right) \cdot (x - u) - \frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2$

Durch Tangente verläuft durch $T(0|0)$

$\left(-\frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{2}u\right) \cdot (0 - u) - \frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2 = 0 \qquad |$ Punktprobe mit $T(0|0)$

$\frac{1}{4}u^4 - \frac{3}{2}u^2 - \frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2 = 0$

$\frac{3}{16}u^4 - \frac{3}{4}u^2 = 0 \qquad | \quad \cdot \frac{16}{3}$

$u^4 - 4u^2 = 0$

$u^2(u^2 - 4) = 0 \qquad |$ Satz vom Nullprodukt

$u_{1,2} = 0$

$u_{3,4} = \pm 2$

$u_{1,2} = 0$ ist Berührstelle der Geraden im Ursprung.

$u_3 = 2$ ist gesuchte Berührstelle an der rechten Böschung.

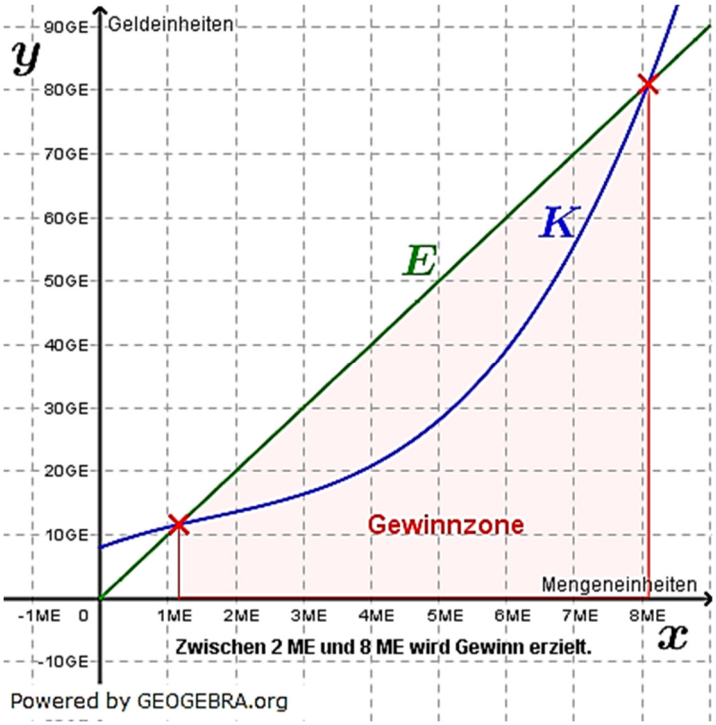
$u_3 = -2$ ist Berührstelle an der linken Böschung.

$f'(2) = -\frac{1}{4}2^3 + \frac{3}{2}2 = -2 + 3 = 1$

Die Tangente hat die Gleichung $y = x$, da die Steigung $a = 1$.

Lösung A4/2019

4.1 *Schaubild der Erlös- und Gesamtkostenfunktion.*



4.2 *Berechnung des maximalen Gewinns:*

$G(x) = E(x) - G(x)$

$E(x) = 10x$

$G(x) = 10x - (0{,}2x^3 - x^2 + 4x + 8) = -0{,}2x^3 + x^2 + 6x - 8$

Maximum über $G'(x) = 0$:

$G'(x) = -0{,}6x^2 + 2x + 6$

$-0{,}6x^2 + 2x + 6 = 0 \qquad | \quad \cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$

$x^2 - \frac{10}{3}x - 10 = 0$

$x_{1,2} = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{90}{9}} = \frac{5}{3} \pm \frac{1}{3} \cdot \sqrt{115}$

$x_1 = 5{,}24; \quad x_2 = -1{,}9$

$G''(x) = -1{,}2x + 2$

$G''(5{,}24) = -1{,}2 \cdot 5{,}24 + 2 < 0$

$x_1 = 5{,}24$ ist Maximum

$G(5{,}24) = -0{,}2 \cdot 5{,}24^3 + 5{,}24^2 + 6 \cdot 5{,}24 - 8 = 22{,}12$

Der maximale Gewinn beträgt $22{,}12\ GE$.

4.3 *Interpretation von Bedingungen:*

Die Bedingungen

(1) $K''(x_1) = 0 \ \wedge \ K'''(x_1) \neq 0$,

(2) $K'(x_1) = \frac{7}{3}$.

bedeuten, dass sich bei $x_1 = \frac{5}{3}\ ME$ ein Wendepunkt von K mit dem geringsten Kostenanstieg (momentane Änderungsrate) $\frac{7}{3}\ GE/ME$ befindet.