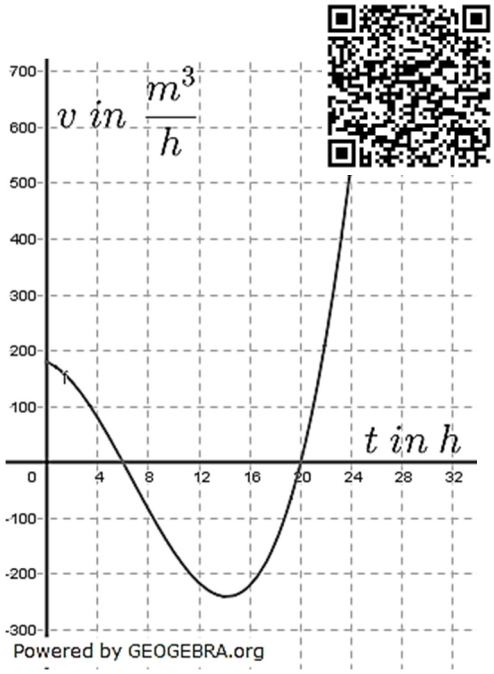
Aufgabe A2/2020

2. Der Wasserzufluss bzw. der Wasserabfluss eines Staubeckens wird über 24 Stunden hinweg beobachtet und durch die Funktion v mit $v(t) = \frac{1}{4} \cdot (t^2 - 36)(t - 20); \quad 0 \leq t \leq 24$ modelliert.
Hierbei gibt t die Zeit seit Beginn der Beobachtung (t = 0) in Stunden an. $v(t)$ wird in Kubikmeter pro Stunde $\left(\frac{m^3}{h}\right)$ gemessen.
Bei Wasserzufluss ist $v(t)$ positiv und bei Wasserabfluss ist $v(t)$ negativ.
Die Abbildung zeigt das Schaubild von v.



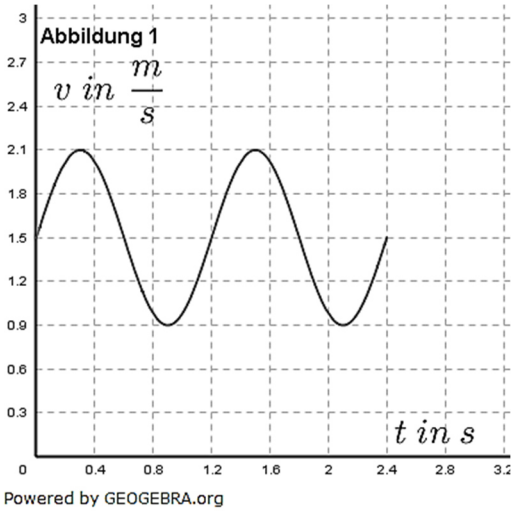
2.1 Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage:
„Es gibt einen Zeitpunkt, an dem $280\ \frac{m^3}{h}$ abfließen."
Geben Sie den maximalen Wasserzufluss und den zugehörigen Zeitpunkt an. (3P)

2.2 Berechnen Sie den Wert des Wasserzuflusses zu Beginn der Beobachtung und wie viele Minuten vergehen, bis v diesen Wert erneut erreicht. (4P)

2.3 20 Stunden nach Beobachtungsbeginn befinden sich noch $1000\ m^3$ Wasser im Becken.
Erläutern Sie, wie man die Wassermenge im Staubecken zum Zeitpunkt $t = 0$ ermitteln kann und geben Sie diese Wassermenge näherungsweise an. (3P)

Aufgabe A3/2020

3. Das Training einer Schwimmerin wird mit Videos ausgewertet. Abbildung 1 zeigt modellhaft die Geschwindigkeit v der Schwimmerin in Metern (m) pro Sekunde (s) in Abhängigkeit von der Zeit t in s.
Ein Armzyklus dauert $12\ s$.

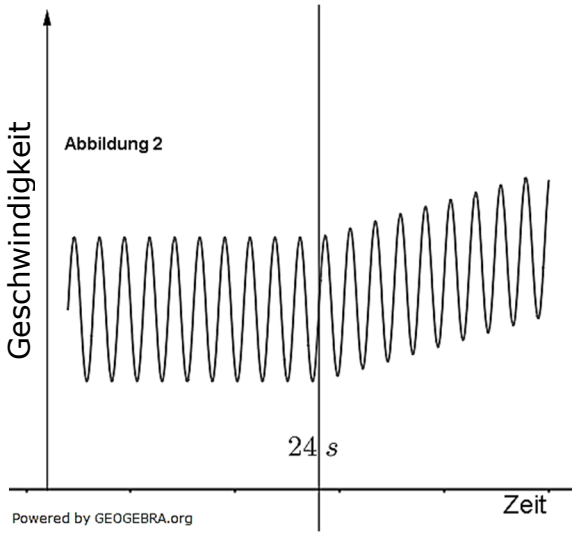


3.1 Begründen Sie mit Hilfe von Abbildung 1, dass die Geschwindigkeit t ab dem Beobachtungsbeginn $(t = 0)$ durch die Funktionsgleichung
$v(t) = 1{,}5 + 0{,}6 \sin\left(\frac{5\pi}{3} t\right)$
beschrieben werden kann. (3P)

3.2 Ermitteln Sie die Länge der Strecke, die gemäß des Modells während eines Armzyklus zurückgelegt wird.
Bestimmen Sie damit die Zeit, die die Schwimmerin für $36\ m$ benötigt. (3P)

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2) 2020-heute

3.3 Zum Zeitpunkt $t = 24$ beginnt die Schwimmerin ihren Endspurt. Dabei erhöht sich ihre Geschwindigkeit pro Sekunde zusätzlich um $0{,}05\frac{m}{s}$.
Die Geschwindigkeit der Schwimmerin ist in Abbildung 2 dargestellt und wird ab $t = 24$ durch eine Funktion v_E modelliert.

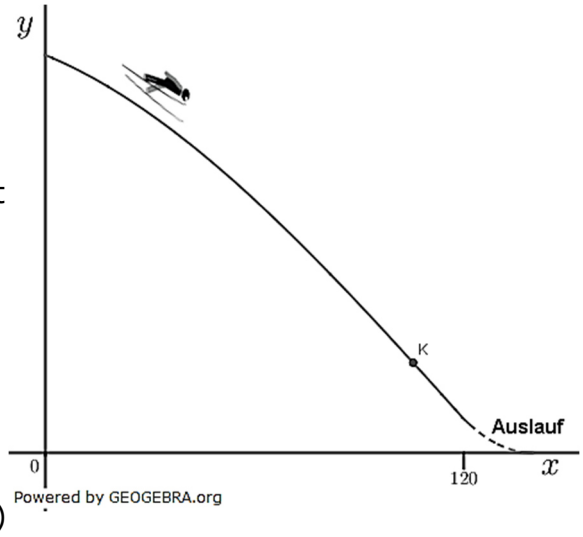


3.3.1 Interpretieren Sie den Ansatz $\int_{24}^{24+u} v_E(t)\,dt = 14$ im Sachzusammenhang. (2P)

3.3.2 Geben Sie einen Funktionsterm für die Funktion v_E an. (2P)

Aufgabe A4/2020

4. Die Abbildung zeigt die Aufsprungbahn einer Skisprungschanze. Der obere Teil der Aufsprungbahn wird durch f mit $f(x) = 0{,}000012x^3 - 0{,}00378x^2 - 0{,}27x + 76$ für $0 \le x \le 120$ modelliert.
Der untere Teil der Aufsprungbahn dient als Auslauf. Alle Angaben sind in Meter.



4.1 Die Aufsprungbahn hat im kritischen Punkt K ihr größtes Gefälle.
Weisen Sie nach, dass die x-Koordinate von K den Wert 105 besitzt und berechnen Sie den Winkel, den die Aufsprungbahn in K mit der Horizontalen einschließt. (5P)

4.2 Die Flugbahn eines Skispringers wird durch die Parabel mit der Gleichung $y = -0{,}00132x^2 - 0{,}436x + 80$ modelliert.
Prüfen Sie, ob die Flugbahn an der Stelle $x = 100$ tangential in die Aufsprungbahn übergeht. (3P)

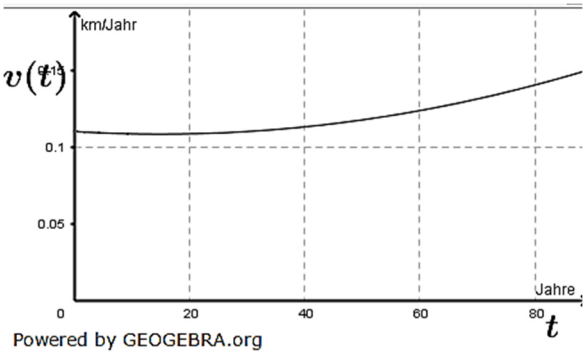
4.3 Erläutern Sie im Sachkontext, welche Größe durch die Berechnung
$$\sqrt{\left(f(0) - f(40)\right)^2 + 1600} + \sqrt{\left(f(40) - f(80)\right)^2 + 1600} + \sqrt{\left(f(80) - f(120)\right)^2 + 1600} \approx 137{,}5$$
ermittelt wird. (2P)

Aufgabe A2/2021

2. Bei der Untersuchung einer Gletscherspalte eines Alpengletschers wurden im Jahr 2012 im Gletschereis nur wenige Zentimeter über dem Grund des Gletschers Ausrüstungsteile gefunden, die im Jahr 1950 von Bergsteigern im Gletschereis zurückgelassen wurden.
Im Laufe der Zeit hatten sich die Ausrüstungsteile mit dem Gletscher talwärts bis zur Fundstelle bewegt. Durch eine dort in den Gesteinsboden verankerte Eisenstange wurde der Fundort der Ausrüstungsteile markiert. Der Ort, an dem der Gletscher talwärts endet, lag 2012 noch 7 Kilometer (km) vom Fundort der Ausrüstungsteile entfernt. Aufgrund der Klimaerwärmung der letzten Jahrzehnte zieht sich das Gletscherende zurück. Es bewegt sich um durchschnittlich 200 Meter (m) pro Jahr in Richtung des Fundorts.

2.1 Betrachtet wird der Abstand des Gletscherendes zum Fundort der Ausrüstung.
Begründen Sie, dass dieser Abstand bezogen auf das Jahr 2012 durch die Gerade mit der Gleichung $y = -0{,}2x + 7$ beschrieben werden kann.
Geben Sie die Bedeutung von x im Sachkontext an. (3P)

2.2 Die Funktion v mit
$v(t) = 7{,}56 \cdot 10^{-6}t^2 - 2{,}27 \cdot 10^{-4}t + 0{,}11;\ t > 0$ modelliert die Geschwindigkeit (in km pro Jahr) des Gletschers bei seiner Bewegung talwärts.
Hier entspricht $t = 0$ dem Jahr 1950. Das Schaubild von v ist in der Abbildung dargestellt.



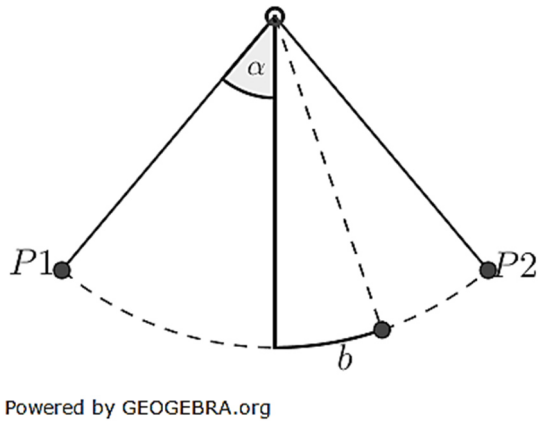
2.2.1 Bestimmen Sie $v(71)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext. (2P)

2.2.2 Prüfen Sie, ob mit Hilfe von v belegbar ist, dass der Gletscher sich von 1950 bis 2021 um durchschnittlich etwa $115\,m$ pro Jahr talwärts bewegt hat. (3P)

2.2.3 Bei der Bergung der Ausrüstungsteile wurden kleine Ausrüstungsteile übersehen, sodass diese im Eis zurückblieben.
Formulieren Sie eine Frage im Sachkontext, die durch Lösen der Gleichung
$\int_{62}^{62+x} v(t)\,dt = -0{,}2x + 7$ mit $x > 0$ beantwortet werden kann. (3P)

Aufgabe A3/2021

3. Ein Fadenpendel besteht aus einem Faden, an dessen unterem Ende eine Kugel befestigt ist. Das Pendel wird in Position $P1$ gebracht und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Anschließend führt es eine Schwingung aus. Die Geschwindigkeit der Kugel wird modelliert durch v mit $v(t) = 0{,}5 \cdot sin(5t)$ mit $t \geq 0$. Dabei wird t die Zeit in Sekunden (s) und $v(t)$ wird in Meter pro Sekunde ($\frac{m}{s}$) angegeben.



3.1 Bestimmen Sie die Zeit, die vom Zeitpunkt des Loslassens an vergeht, bis die Kugel zum ersten Mal den Umkehrpunkt $P2$ erreicht. (2P)

3.2 Die Beschleunigung der Kugel ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit. Bestimmen Sie die momentane Beschleunigung der Kugel $0{,}2$ Sekunden nach dem Loslassen sowie die durchschnittliche Beschleunigung innerhalb der ersten $0{,}2$ Sekunden. (3P)

3.3 Die Funktion b mit $b(t) = -0{,}1 \cdot \cos(5t)$; $t \geq 0$ modelliert die Auslenkung des Pendels, wobei $b(t)$ die „Länge" des Bogens vom tiefsten Punkt bis zur Position der Kugel zum Zeitpunkt t ist (siehe Abbildung).
Negative Werte von $b(t)$ bedeuten dabei Auslenkungen nach links (in Richtung von $P1$), positive Werte bedeuten Auslenkungen nach rechts.

3.3.1 Zeigen Sie, wie man ausgehend von v auf die Funktion b gelangt. (3P)

3.3.2 Die Länge des Fadenpendels ist $0{,}4\,m$.
Berechnen Sie den Auslenkungswinkel α zum Zeitpunkt des Loslassens (siehe Abbildung). (2P)

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A4/2021

4. Marie und Pierre Curie entdeckten 1898 gemeinsam das radioaktive Isotop Radium 226. Für dieses ist bekannt, dass die Halbwertszeit etwa 1600 Jahre beträgt. Die Halbwertszeit gibt an, wie viel Zeit vergeht, bis von einer gegebenen Menge eines zerfallenden Stoffes nur noch die Hälfte vorhanden ist.
Die Kerne von Radium zerfallen und geben dabei die sogenannte α-Strahlung ab. Der Zerfall der Radiumkerne kann mit der Funktion f mit $f(t) = c \cdot e^{kt};\ t \geq 0$ beschrieben werden. Dabei sind $c > 0$ und $k < 0$ geeignete Konstanten und $f(t)$ die zum Zeitpunkt t in Jahren nach Beobachtungsbeginn $t = 0$ vorhandene Masse von Radium 226 in Gramm (g).

4.1 Ermitteln Sie den Wert von k sowie die Masse einer Probe zu Beobachtungsbeginn, falls 20 Jahre danach noch $99{,}14$ g Radium vorhanden sind. (3P)

4.2 Erläutern Sie im Sachkontext, welcher Zeitpunkt t mit dem Ansatz

$$\frac{f(0) - f(t)}{f(0)} = 0{,}9$$

bestimmt werden kann. (2P)

4.3 Es wird nun eine andere Probe betrachtet. Für die Modellierung von deren Zerfall gelten: $c = 150$ und $k = -4{,}332 \cdot 10^{-4}$.

4.3.1 Geben Sie den Zeitpunkt an, an dem am meisten Radium zerfällt und bestimmen Sie zu diesem Zeitpunkt die Änderungsrate von f. (2P)

4.3.2 Beweisen Sie, dass die folgende Aussage wahr ist:
„Zu jedem beliebigen Zeitpunkt t gilt: Der Anteil, der a Jahre später von der Masse $f(t)$ noch vorhanden ist, hängt nur von a ab.“ (3P)

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A2/2020

2.1 *Stellung zu „Es gibt einen Zeitpunkt, an dem $280\ \frac{m^3}{h}$ abfließen."*
Diesen Zeitpunkt gibt es nicht. Im Tiefpunkt bei $t_0 \approx 14$ liegt ein Wasserabfluss von etwa $280\ \frac{m^3}{h}$ vor.
Maximaler Wasserzufluss und zugehöriger Zeitpunkt:
Der maximale Wasserzufluss ist um Mitternacht mit etwa $500\ \frac{m^3}{h}$.

2.2 *Wasserzuflusses zu Beginn der Beobachtung:*
$v(0) = \frac{1}{4} \cdot (0-36)(0-20) = \frac{1}{4} \cdot 720 = 180$
Zu Beginn der Beobachtung fließen $180\ \frac{m^3}{h}$ Wasser zu.
Anzahl Minuten, bis v diesen Wert erneut erreicht:
$v(t) = 180 = \frac{1}{4} \cdot (x^2-36)(x-20) \quad | \quad \cdot 4$
$(x^2-36)(x-20) = 720$
$x^3 - 20x^2 - 36x + 720 = 720 \quad | \quad -720$
$x^3 - 20x^2 - 36x = 0$
$x(x^2 - 20x - 36) = 0$^ | Satz vom Nullprodukt
$x^2 - 20x - 36 = 0$
$x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100+36} = 10 \pm \sqrt{136} = 10 \pm 11{,}66$
$x_1 = 21{,}66\ h = 1299{,}6\ min$
Nach etwa 1300 Minuten erreicht v wieder die gleiche Geschwindigkeit wie zu Beginn der Beobachtung.

2.3 *Wassermenge im Staubecken zum Zeitpunkt $t = 0$:*
Nach 20 Stunden sind noch $1000\ m^3$ Wasser im Becken.
Der Anfangsbestand errechnet sich aus diesen $1000\ m^3$ abzüglich $\int_0^{20} v(t)\ dt$.
Der Wert dieses Integrals entspricht aber der Flächenbilanz zwischen und der -Achse. Näherungsweise zählen wir die Kästchen ab.
Wir haben etwa $1{,}5$ Kästchen Wasserzufluss zwischen 0 und 6 Uhr, sowie etwa $5{,}5$ Kästchen Wasserabfluss zwischen 6 Uhr und 20 Uhr. Per Saldo haben wir also 4 Kästchen Wasserabfluss. Bei einem Volumen pro Kästchen von $4\ h \cdot 100\ \frac{m^3}{h} = 400\ m^3$ sind dies also $1600\ m^3$ Wasserabfluss. Bei $1000\ m^3$ Wasserstand um 20 Uhr, müssen sich zu Beginn also $2600\ m^3$ Wasser im Becken befunden haben.
Berechnung:
$V(0) = 1000 - \frac{1}{4}\int_0^{20} (t^2-36)(t-20)\ dt = 1000 - \frac{1}{4}\int_0^{20} t^3 - 20t^2 - 36t + 720\ dt$
$V(0) = 1000 - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{20}{3}t^3 - 18t^2 + 720t\right]_0^{20} = 1000 - \frac{1}{4}(-6133{,}33) = 2533{,}33$
Rechnerisch waren zu Beginn der Beobachtung etwa $2530\ m^3$ Wasser im Becken.

Lösung A3/2020

3.1 *Begründung für eine Funktionsgleichung:*

Abbildung 1 zeigt eine Sinuskurve vom Typ $f(t) = a \cdot sin(bt) + d$.

$a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{2{,}1 - 0{,}9}{2} = 0{,}6$

$d = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{2{,}1 + 0{,}9}{2} = 1{,}5$

Die Periode ist $p = 1{,}2$

$b = \frac{2\pi}{1{,}2} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$

Die abgebildete Sinuskurve hat somit die Funkionsgleichung

$f(t) = 0{,}6 \cdot sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right) + 1{,}5$ **q.e.d.**

3.2 Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges nach der Zeit. Somit ist der Weg das Integral über die Geschwindigkeit im gesuchten Intervall. Es gilt somit:

$s_{1,2} = \int_0^{1,2} \left(0{,}6 sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right) + 1{,}5\right) dt$

$s_{1,2} = \left[\frac{3}{5\pi} \cdot \left(-0{,}6 cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right) + 1{,}5t\right.\right]_0^{1,2} = \left(-\frac{3}{5\pi} \cdot 0{,}6\cos(2\pi) + 1{,}8 + \frac{1{,}8}{5\pi}\right)$

$s_{1,2} = 1{,}8$

Die Schwimmerin legt innerhalb eines Armzyklus $1{,}8$ *Meter zurück.*

36 Meter entspricht $\frac{36}{1{,}8} = 20$ Armzyklen.

Zeit für 36 Meter = $20 \cdot 1{,}2\,s = 24\,s$.

Die Schwimmerin benötigt 24 *Sekunden für* 36 *Meter.*

3.3.1 *Interpretation des Ansatzes* $\int_{24}^{24+u} v_E(t)\,dt = 14$

Welche Zeit u in Sekunden benötigt die Schwimmerin ab der 24. Sekunde um weitere 14 Meter zu schwimmen?

3.3.2 *Funktionsterm für die Funktion* v_E*:*

$v_E(t) = v(t) + 0{,}05 \cdot (t - 24)$ für $t \geq 24$

Hinweis:

$v_E(t) = v(t) + 0{,}05 \cdot t$ wäre falsch, da man hier davon ausgehen würde, dass sich die Geschwindigkeit schon ab $t = 0$ um $0{,}05\frac{m}{s}$ wächst (und nicht erst ab $t = 24$).

Lösung A4/2020

4.1 *x-Koordinate des Aufsetzpunktes K:*

Größte Steigungen bzw. größtes Gefälle herrscht in den Wendepunkten vor.

$f'(x) = 0{,}000036x^2 - 0{,}00756x - 0{,}27$

$f''(x) = 0{,}000072x - 0{,}00756$

$f''(x) = 0$

$0{,}000072x - 0{,}00756 = 0$

$0{,}000072x = 0{,}00756$

$x = 105$

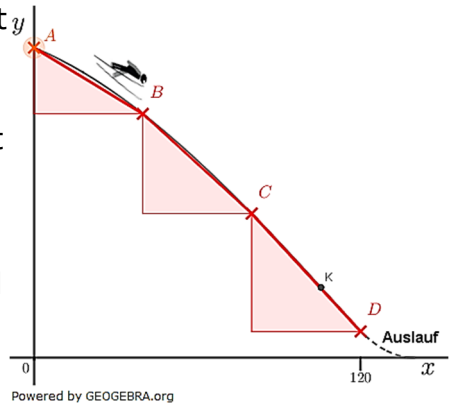
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Winkel, den die Aufsprungbahn in K mit der Horizontalen einschließt:
$f'(105) = 0{,}000036 \cdot 105^2 - 0{,}00756 \cdot 105 - 0{,}27 = -0{,}6669$
$tan(\alpha) = f'(105) = -0{,}6669$
$\alpha = arctan(-0{,}6669) = -33{,}699°$
Dies ist der Winkel, den die x-Achse mit der Tangente an Punkt K „im Uhrzeigersinn" bildet. Der Aufsprungwinkel mit der Horizontalen ist dann
$\alpha^* = 180° + \alpha = 180° - 33{,}699° = 146{,}3°$
Der Winkel, den die x-Achse mit der Tangente an Punkt K einschließt beträgt etwa $146{,}3°$.

4.2 *Prüfung, ob die Flugbahn an der Stelle $x = 100$ tangential in die Aufsprungbahn übergeht:*
Die bedingung hierfür ist, dass $f(100) = P(100) \wedge f'(100) = p'(100)$ ist.
$p(x) = -0{,}00132x^2 - 0{,}436x + 80$
$p'(x) = -0{,}00264x - 0{,}436$
$p(100) = 23{,}2$
$p'(100) = -0{,}7$
$f(100) = 23{,}2$
$f'(100) = -0{,}666$
Wegen $f'(100) \neq p'(100)$ *geht die Flugbahn an der Stelle $x = 100$ nicht tangential in die Aufsprungbahn über.*

4.3 *Erläuterung einer Größe im Sachkontext:*
Bei den Wurzeltermen handelt es sich jeweils um die Abstandsformeln zwischen zwei Punkten im Koordinatensystem.
Durch die Terme $f(0)$, $f(40)$, $f(80)$ und $f(120)$ erkennt man, dass es um Punkte geht, die auf dem Schaubild von f (also auf der Aufsprungbahn) liegen mit den x-Werten $x = 0$, $x = 40$, $x = 80$ und $x = 120$.

Die Punkte sind in der Skizze eingezeichnet $A(0|f(0))$, $B(40|f(40))$, $C(80|f(80))$ und $D(120|f(120))$.
Der Term $\sqrt{(f(0) - f(40))^2 + 1600}$ beschreibt den Abstand der Punkte A und B (Satz des Pythagoras).
Die beiden anderen Wurzelterme beschreiben den Abstand der Punkte B und C bzw. der Punkte C und D.
Die Summe der drei Längen ergibt den berechneten Wert von etwa $137{,}5$ Meter.



Die Summe der Längen stellt eine Näherung für die Länge der oberen Aufsprungbahn dar.

Lösung A2/2021

2.1 *Begründung einer Funktionsgleichung für den Abstand des Gletscherendes bezogen auf das Jahr* 2012*:*
Aus der Aufgabenstellung ergibt sich, dass der Gletscher pro Jahr um $200\,m$ zurückzieht. Damit haben wir eine Änderungsrate von $-0{,}2\frac{km}{a}$, die Steigung der Funktionsgleichung. Das Gletscherende lag 2012 noch $7\,km$ vom Fundort entfernt, was dem „Anfangsbestand" des Abschmelzens in 2012 entspricht.

2.2.1 *Bestimmung von* $v(71)$*:*
$v(71) = 7{,}56 \cdot 10^{-6} \cdot 71^2 - 2{,}27 \cdot 10^{-4} \cdot 71 + 0{,}11 = 0{,}132$
Interpretation im Sachkontext:
In 2021 zieht sich der Gletscher etwa $132\,m$ zurück.

2.2.2 *Prüfung einer Durchschnittsgeschwindigkeit von etwa* $115\,m$ *pro Jahr zwischen* 1950 *und* 2021*:*
$\overline{v} = \frac{1}{71-0}\int_0^{71} 7{,}56 \cdot 10^{-6}t^2 - 2{,}27 \cdot 10^{-4}t + 0{,}11\,dt =$
$= \frac{1}{71}\left[\frac{7{,}56\cdot 10^{-6}t^3}{3} - \frac{2{,}27\cdot 10^{-4}t^2}{2} + 0{,}11t\right]_0^{71} = \frac{1}{71}\left(\frac{7{,}56\cdot 10^{-6}\cdot 71^3}{3} - \frac{2{,}27\cdot 10^{-4}\cdot 71^2}{2} + 0{,}11 \cdot 71\right)$
$= 0{,}115$
Mit Hilfe von v *ist somit belegbar, dass der Gletscher sich von* 1950 *bis* 2021 *um durchschnittlich etwa* $115\,m$ *pro Jahr talwärts bewegt hat.*

2.2.3 *Sachkontext für die Lösung einer Gleichung:*
Wie viele Jahre x dauert es von 2012 an, bis die kleinen Ausrüstungsteile, die bei der Bergung im Eis verblieben sind, vom Gletscherende freigegeben werden?

Lösung A3/2021

3.1 *Zeit, die vom Zeitpunkt des Loslassens an vergeht, bis die Kugel zum ersten Mal den Umkehrpunkt* $P2$ *erreicht:*
Die Zeit entspricht exakt einer halben Periode der Sinusschwingung.
$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2}{5}\pi = T$
$\frac{p}{2} = \frac{1}{5}\pi = 0{,}63$
Nach etwa $0{,}63\,s$ *erreicht die Kugel zum ersten mal den Punkt* $P2$*.*

3.2 *Bestimmung der Beschleunigung* $a(0{,}2)$*:*
$a(t) = v'(t) = 0{,}5 \cdot 5 \cdot \cos(5t) = 0{,}25 \cdot \cos(5t)$
$a(0{,}2) = 0{,}25\cos(1) = 0{,}135$
$0{,}2\,s$ nach dem Loslassen hat die Kugel erstmals eine Beschleunigung von $0{,}135\frac{m}{s^2}$.
Mittlere Beschleunigung innerhalb der ersten $0{,}2$ Sekunden.
$\overline{a} = \frac{1}{0{,}2} \cdot \int_0^{0{,}2} a(t)\,dt = \frac{1}{0{,}2} \cdot \left(v(0{,}2) - v(0)\right) = \frac{0{,}42-00}{0{,}2} = 2{,}1$
Die mittlere Beschleunigung in den ersten $0{,}2$ Sekunden betrug $2{,}1\,m/s^2$.

3.3.1 *Nachweis der Funktionsgleichung für die Bogenlänge b:*
Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges nach der Zeit. Somit ist der Weg eine Stammfunktion der Geschwindigkeit.
$b(t) = \int v(t)\,dt = -\frac{0,5}{5}\cos(5t) + C = -0,1\cos(5t) + C$
Nach einem Vierteil der Periodendauer, also zum Zeitpunkt $\frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$ befindet sich die Kugel im tiefsten Punkt.
Dort gilt: $b\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0$.
$b\left(\frac{\pi}{10}\right) = -0,1\,cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) + C = 0$
$-0,1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 0$ ➔ $C = 0$
Damit ist die gesuchte Funktion $b(t) = -0,1 \cdot cos\,(5t)$. **q.e.d.**

3.3.2 *Berechnen Sie den Auslenkungswinkel α zum Zeitpunkt des Loslassens:*
Länge des Bogens zum Zeitpunkt $t = 0$:
$|b(0)| = 0,1$
Für die Länge eines Bogens gilt:
$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180\,°}$
$\alpha = \frac{b \cdot 180\,°}{\pi \cdot r} = \frac{0,1 \cdot 180\,°}{\pi \cdot 0,4} = 14,3\,°$
Der Auslenkwinkel beträgt etwa $14,3\,°$.

Lösung A4/2021

4.1 *Ermittlung eines Wertes von k sowie der Masse einer Probe zu Beobachtungsbeginn:*

$f(t) = c \cdot e^{kt}$

$f(20) = 99,14 = c \cdot e^{20k}$ | Punktprobe mit $P(20|99,14)$

$f(1600) = \frac{1}{2} \cdot f(0) = c \cdot e^{1600k}$ | Punktprobe zur Halbwertzeit

$f(0) = c \cdot e^{0} = c$ | Anfangsbestand

(I) $99,14 = c \cdot e^{20k}$

(II) $\frac{1}{2} \cdot c = c \cdot e^{1600k}$ | $: c$

$0,5 = e^{1600k}$ | ln

$ln\,(0,5) = 1600k$ | $: 1600$

$k = -\frac{ln(2)}{1600} = -0,000433217$

$k \rightarrow (I)$

(I) $99,14 = c \cdot e^{20 \cdot (-0,000433217)}$ | $: e^{20 \cdot (-0,000433217)}$

$c = \frac{99,14}{e^{20 \cdot (-0,000433217)}} = 100$

Die Masse der Probe zu Beobachtungsbeginn war $100\,g$.

4.2 *Erläuterung eines Sachkontextes:*

$\frac{f(0) - f(t)}{f(0)} = 0,9$ | $\cdot f(0)$

$f(0) - f(t) = 0,9 \cdot f(0)$

$f(t) = f(0) - 0,9 \cdot f(0) = 0,1 \cdot f(0)$

Mit der Formel lässt sich der Zeitpunkt t bestimmen, zu dem nur noch $10\,\%$ des Anfangsbestandes vorhanden sind bzw. $90\,\%$ zerfallen sind.

4.3.1 *Zeitpunkt eines stärksten Zerfalls von Radium und momentane Änderungsrate des selben:*
Stärkste Abnahme bzw. Zunahme findet in Wendepunkten statt.
$f(t) = 150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} t}$
$f'(t) = -4{,}332 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} t}$
$f''(t) = (4{,}332 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} t}$
Wendepunkte mit $f''(t) = 0$
$0{,}2815 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} t} = 0$
Exponentialfunktionen können nicht Null werden.
Betrachtung an den Rändern des Systems:
$f'(0) = -4{,}332 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot e^{0} = -649{,}8 \cdot 10^{-4}$
$f'(\infty) = 0$
Die Funktion ist streng monoton fallend, deshalb liegt der Zeitpunkt des stärksten Zerfalls von Radium zu Beobachtungsbeginn mit etwa $-0{,}065 \frac{g}{a}$.

4.3.2 Bestand zum Zeitpunkt t: $f(t)$
Bestand a Jahre später: $f(t+a)$
Anteil von $f(t+a)$ an $f(t)$:
$\frac{f(t+a)}{f(t)} = \frac{150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4}(t+a)}}{150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} t}} = e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4} a}$
Somit hängt der Anteil nur vom Wert von a ab.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de