

# Abituraufgaben Teil 2 Berufsgymnasien (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

Lösungen

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2) 2020-heute

## Lösung A2/2020

- 2.1 Stellung zu "Es gibt einen Zeitpunkt, an dem 280  $\frac{m^3}{h}$ abfließen." Diesen Zeitpunkt gibt es nicht. Im Tiefpunkt bei  $t_0 \approx 14$  liegt ein Wasserabfluss von etwa 280  $\frac{m^3}{h}$  vor.
  - Maximaler Wasserzufluss und zugehöriger Zeitpunkt:

Der maximale Wasserzufluss ist um Mitternacht mit etwa 500  $\frac{m^3}{r}$ .

2.2 Wasserzuflusses zu Beginn der Beobachtung:

$$v(0) = \frac{1}{4} \cdot (0 - 36)(0 - 20) = \frac{1}{4} \cdot 720 = 180$$

Zu Beginn der Beobachtung fließen 180  $\frac{m^3}{h}$  Wasser zu.

Anzahl Minuten, bis v diesen Wert erneut erreicht:

$$v(t) = 180 = \frac{1}{4} \cdot (x^2 - 36)(x - 20)$$

$$(x^2 - 36)(x - 20) = 720$$
  
 $x^3 - 20x^2 - 36x + 720 = 720$  | -720  
 $x^3 - 20x^2 - 36x = 0$ 

$$x^3 - 20x^2 - 36x = 0$$

$$x(x^2 - 20x - 36) = 0^$$
 | Satz vom Nullprodukt

$$x^2 - 20x - 36 = 0$$

$$x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 + 36} = 10 \pm \sqrt{136} = 10 \pm 11,66$$

$$x_1 = 21,66 \ h = 1299,6 \ min$$

Nach etwa 1300 Minuten erreicht v wieder die gleiche Geschwindigkeit wie zu Beginn der Beobachtung.

2.3 Wassermenge im Staubecken zum Zeitpunkt t = 0:

Nach 20 Stunden sind noch  $1000 \, m^3$  Wasser im Becken.

Der Anfangsbestand errechnet sich aus diesen  $1000 \, m^3$  abzüglich  $\int_0^{20} v(t) \, dt$ . Der Wert dieses Integrals entspricht aber der Flächenbilanz zwischen und

der -Achse. Näherungsweise zählen wir die Kästchen ab. Wir haben etwa 1,5 Kästchen Wasserzufluss zwischen 0 und 6 Uhr, sowie etwa 5,5 Kästchen Wasserabfluss zwischen 6 Uhr und 20 Uhr. Per Saldo haben wir also 4 Kästchen Wasserabfluss. Bei einem Volumen pro Kästchen von 4 h  $\cdot$ 

 $100 \frac{m^3}{h} = 400 m^3$  sind dies also  $1600 m^3$  Wasserabfluss. Bei  $1000 m^3$ Wasserstand um 20 Uhr, müssen sich zu Beginn also  $2600 \, m^3$  Wasser im Becken befunden haben.

## Berechnung:

$$V(0) = 1000 - \frac{1}{4} \int_0^{20} (t^2 - 36)(t - 20) dt = 1000 - \frac{1}{4} \int_0^{20} t^3 - 20t^2 - 36t + 720 dt$$

$$V(0) = 1000 - \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{4} t^4 - \frac{20}{3} t^3 - 18t^2 + 720t \right]_0^{20} = 1000 - \frac{1}{4} (-6133,33) = 2533,33$$

Rechnerisch waren zu Beginn der Beobachtung etwa  $2530 \, m^3$  Wasser im Becken.

Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de



## Abituraufgaben Teil 2 Berufsgymnasien (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

Lösungen

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2) 2020-heute

## <u>Lösung A3/2020</u>

Begründung für eine Funktionsgleichung:

Abbildung 1 zeigt eine Sinuskurve vom Typ  $f(t) = a \cdot si n(bt) + d$ .

$$a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{2.1 - 0.9}{2} = 0.6$$

$$a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{2,1 - 0,9}{2} = 0,6$$

$$d = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{2,1 + 0,9}{2} = 1,5$$

Die Periode ist 
$$p = 1,2$$
  
 $b = \frac{2\pi}{1,2} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$ 

Die abgebildete Sinuskurve hat somit die Funkionsgleichung

$$f(t) = 0.6 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right) + 1.5$$

3.2 Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges nach der Zeit. Somit ist der Weg das Integral über die Geschwindigkeit im gesuchten Intervall. Es gilt somit:

$$s_{1,2} = \int_0^{1,2} \left( 0.6 \sin \left( \frac{5\pi}{3} t \right) + 1.5 \right) dt$$

$$s_{1,2} = \left[\frac{3}{5\pi} \cdot (-0.6\cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right) + 1.5t\right]_0^{1,2} = \left(-\frac{3}{5\pi} \cdot 0.6\cos(2\pi) + 1.8 + \frac{1.8}{5\pi}\right)$$

$$s_{1,2} = 1.8$$

Die Schwimmerin legt innerhalb eines Armzyklus 1,8 Meter zurück. 36 Meter entspricht  $\frac{36}{1,8}=20$  Armzyklen.

Zeit für 36 Meter =  $20 \cdot 1,2 s = 24 s$ .

Die Schwimmerin benötigt 24 Sekunden für 36 Meter.

Interpretation des Ansatzes  $\int_{24}^{24+u} v_E(t) dt = 14$ 3.3.1

Welche Zeit u in Sekunden benötigt die Schwimmerin ab der 24. Sekunde um weitere 14 Meter zu schwimmen?

3.3.2 Funktionsterm für die Funktion  $v_E$ :

$$v_E(t) = v(t) + 0.05 \cdot (t - 24) \text{ für } t \ge 24$$

Hinweis:

 $v_E(t) = v(t) + 0.05 \cdot t$  wäre falsch, da man hier davon ausgehen würde, dass sich die Geschwindigkeit schon ab t = 0 um  $0.05 \frac{m}{s}$  wächst (und nicht erst ab t = 24).

## Lösung A4/2020

x-Koordinate des Aufsetzpunktes K:

Größte Steigungen bzw. größtes Gefälle herrscht in den Wendepunkten

$$f'(x) = 0.000036x^2 - 0.00756x - 0.27$$

$$f''(x) = 0.000072x - 0.00756$$

$$f''(x) = 0$$

$$0.000072x - 0.00756 = 0$$

$$0.000072x = 0.00756$$

$$x = 105$$



## Abituraufgaben Teil 2

Berufsgymnasien (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG) Lösungen

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2) 2020-heute

Winkel, den die Aufsprungbahn in K mit der Horizontalen einschließt:

 $f'(105) = 0.000036 \cdot 105^2 - 0.00756 \cdot 105 - 0.27 = -0.6669$ 

 $tan(\alpha) = f'(105) = -0,6669$ 

 $\alpha = arctan(-0.6669) = -33.699^{\circ}$ 

Dies ist der Winkel, den die x-Achse mit der Tangente an Punkt K "im Uhrzeigersinn" bildet. Der Aufsprungwinkel mit der Horizontalen ist dann  $\alpha^* = 180 \degree + \alpha = 180 \degree - 33,699 \degree = 146,3 \degree$ 

Der Winkel, den die x-Achse mit der Tangente an Punkt K einschließt beträgt etwa 146,3°.

4.2 Prüfung, ob die Flugbahn an der Stelle x = 100 tangential in die Aufsprungbahn übergeht:

Die bedingung hierfür ist, dass  $f(100) = P(100) \wedge f'(100) = p'(100)$  ist.

 $p(x) = -0.00132x^2 - 0.436x + 80$ 

p'(x) = -0.00264x - 0.436

p(100) = 23.2

p'(100) = -0.7

f(100) = 23.2

f'(100) = -0,666

Wegen  $f'(100) \neq p'(100)$  geht die Flugbahn an der Stelle x = 100 nicht tangential in die Aufsprungbahn über.

4.3 Erläuterung einer Größe im Sachkontext:

> Bei den Wurzeltermen handelt es sich jeweils um die Abstandsformeln zwischen zwei Punkten im Koordinatensystem.

Durch die Terme f(0), f(40), f(80) und f(120) erkennt man, dass es um Punkte geht, die auf dem Schaubild von f (also auf der Aufsprungbahn) liegen mit den x-Werten x = 0, x = 40, x = 80 und x = 120.

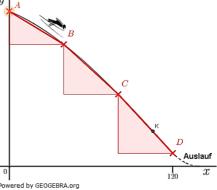
Die Punkte sind in der Skizze eingezeichnet y A(0|f(0)), B(40|f(40)), C(80|f(80)) und D(120|f(120)).

Der Term  $\sqrt{(f(0)-f(40))^2+1600}$  beschreibt den Abstand der Punkte A und B (Satz des Pythagoras).

Die beiden anderen Wurzelterme beschreiben den Abstand der Punkte B und C bzw. der Punkte C und D.

Die Summe der drei Längen ergibt den

berechneten Wert von etwa 137,5 Meter.



Die Summe der Längen stellt eine Näherung für die Länge der oberen Aufsprungbahn dar.



## Abituraufgaben Teil 2 Berufsgymnasien (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

Lösungen

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2) 2020-heute

#### Lösung A2/2021

- Begründung einer Funktionsgleichung für den Abstand des Gletscherendes bezogen auf das Jahr 2012: Aus der Aufgabenstellung ergibt sich, dass der Gletscher pro Jahr um 200 m zurückzieht. Damit haben wir eine Änderungsrate von  $-0.2 \frac{km}{a}$ , die Steigung der Funktionsgleichung. Das Gletscherende lag 2012 noch 7 km vom Fundort entfernt, was dem "Anfangsbestand" des Abschmelzens in 2012 entspricht.
- 2.2.1 Bestimmung von v(71):  $v(71) = 7.56 \cdot 10^{-6} \cdot 71^2 - 2.27 \cdot 10^{-4} \cdot 71 + 0.11 = 0.132$ Interpretation im Sachkontext: In 2021 zieht sich der Gletscher etwa 132 m zurück.
- 2.2.2 Prüfung einer Durchschnittsgeschwindigkeit von etwa 115 m pro Jahr zwischen 1950 und 2021:

$$\overline{v} = \frac{1}{71 - 0} \int_0^{71} 7.56 \cdot 10^{-6} t^2 - 2.27 \cdot 10^{-4} t + 0.11 dt =$$

$$= \frac{1}{71} \left[ \frac{7.56 \cdot 10^{-6} t^3}{3} - \frac{2.27 \cdot 10^{-4} t^2}{2} + 0.11 t \right]_0^{71} = \frac{1}{71} \left( \frac{7.56 \cdot 10^{-6} \cdot 71^3}{3} - \frac{2.27 \cdot 10^{-4} \cdot 71^2}{2} + 0.11 \cdot 71 \right)$$

$$= 0.115$$

Mit Hilfe von v ist somit belegbar, dass der Gletscher sich von 1950 bis 2021 um durchschnittlich etwa 115 m pro Jahr talwärts bewegt hat.

2.2.3 Sachkontext für die Lösung einer Gleichung: Wie viele Jahre x dauert es von 2012 an, bis die kleinen Ausrüstungsteile, die bei der Bergung im Eis verblieben sind, vom Gletscherende freigegeben werden?

## Lösung A3/2021

Zeit, die vom Zeitpunkt des Loslassens an vergeht, bis die Kugel zum ersten Mal den Umkehrpunkt P2 erreicht:

Die Zeit entspricht exakt einer halben Periode der Sinusschwingung.

$$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2}{5}\pi = T$$

$$\frac{p}{2} = \frac{1}{5}\pi = 0.63$$

Nach etwa 0,63 s erreicht die Kugel zum ersten mal den Punkt P2.

3.2 Bestimmung der Beschleunigung a(0,2):

$$a(t) = v'(t) = 0.5 \cdot 5 \cdot \cos(5t) = 0.25 \cdot \cos(5t)$$

 $a(0,2) = 0.25\cos(1) = 0.135$ 

0,2 s nach dem Loslassen hat die Kugel erstmals eine Beschleunigung von  $0,135\frac{m}{s^2}$ .

Mittlere Beschleunigung innerhalb der ersten 0,2 Sekunden.

$$\overline{a} = \frac{1}{0.2} \cdot \int_0^{0.2} a(t) \, dt = \frac{1}{0.2} \cdot \left( v(0.2) - v(0) \right) = \frac{0.42 - 00}{0.2} = 2.1$$

Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Die mittlere Beschleunigung in den ersten 0,2 Sekunden betrug 2,1  $m/s^2$ .



Abituraufgaben Teil 2
Berufsgymnasien (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG) Lösungen

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2) 2020-heute

#### 3.3.1 Nachweis der Funktionsgleichung für die Bogenlänge b:

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Weges nach der Zeit. Somit ist der Weg eine Stammfunktion der Geschwindigkeit.

$$b(t) = \int v(t) dt = -\frac{0.5}{5}\cos(5t) + C = -0.1\cos(5t) + C$$

Nach einem Vierteil der Periodendauer, also zum Zeitpunkt  $\frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$ befindet sich die Kugel im tiefsten Punkt.

Dort gilt: 
$$b\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0$$
.

$$b\left(\frac{\pi}{10}\right) = -0.1\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) + C = 0$$
$$-0.1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 0 \implies C = 0$$

Damit ist die gesuchte Funktion  $b(t) = -0.1 \cdot cos(5t)$ .

q.e.d.

#### Berechnen Sie den Auslenkungswinkel $\alpha$ zum Zeitpunkt des Loslassens: Länge des Bogens zum Zeitpunkt t = 0:

$$|b(0)| = 0.1$$

Für die Länge eines Bogens gilt:

$$b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^{\circ}}$$

$$\alpha = \frac{b \cdot 180^{\circ}}{\pi \cdot r} = \frac{0.1 \cdot 180^{\circ}}{\pi \cdot 0.4} = 14.3^{\circ}$$

Der Auslenkwinkel beträgt etwa 14,3°.

## Lösung A4/2021

#### 4.1 Ermittlung eines Wertes von k sowie der Masse einer Probe zu Beobachtungsbeginn:

$$f(t) = c \cdot e^{kt}$$

$$f(20) = 99,14 = c \cdot e^{20k}$$
 | Punktprobe mit  $P(20|99,14)$ 

$$f(1600) = \frac{1}{2} \cdot f(0) = c \cdot e^{1600k}$$
 | Punktprobe zur Halbwertzeit

$$f(0) = c \cdot e^{0} = c$$
 | Anfangsbestand

(I) 
$$99,14 = c \cdot e^{20k}$$

(II) 
$$\frac{1}{2} \cdot c = c \cdot e^{1600k}$$
 | :  $c$  |  $ln$  |  $ln (0.5) = 1600k$  | :  $1600$ 

$$k = -\frac{\ln(2)}{1600} = -0.000433217$$

$$k \rightarrow (I)$$

(I) 99,14 = 
$$c \cdot e^{20 \cdot (-0,000433217)}$$
 | :  $e^{20 \cdot (-0,000433217)}$   
 $c = \frac{99,14}{e^{20 \cdot (-0,000433217)}} = 100$ 

Die Masse der Probe zu Beobachtungsbeginn war 100 g.

#### 4.2 Erläuterung eines Sachkontextes:

$$\frac{f(0)-f(t)}{f(0)} = 0.9 \qquad | \qquad f(0)$$

$$f(0) - f(t) = 0.9 \cdot f(0)$$

$$f(0) - f(t) = 0.9 \cdot f(0)$$
  

$$f(t) = f(0) - 0.9 \cdot f(0) = 0.1 \cdot f(0)$$

Mit der Formel lässt sich der Zeitpunkt t bestimmen, zu dem nur noch 10 % des Anfangsbestandes vorhanden sind bzw. 90 % zerfallen sind.



Abituraufgaben Teil 2
Berufsgymnasien (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG) Lösungen

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2) 2020-heute

4.3.1 Zeitpunkt eines stärksten Zerfalls von Radium und momentane Änderungsrate des selben:

Stärkste Abnahme bzw. Zunahme findet in Wendepunkten statt.

$$f(t) = 150 \cdot e^{-4{,}332 \cdot 10^{-4}t}$$

$$f'(t) = -4,332 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot e^{-4,332 \cdot 10^{-4}t}$$

$$f''(t) = (4,332 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 150 \cdot e^{-4,332 \cdot 10^{-4}t}$$

Wendepunkte mit f''(t) = 0

$$0.2815 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-4.332 \cdot 10^{-4}t} = 0$$

Exponentialfunktionen können nicht Null werden.

Betrachtung an den Rändern des Systems:

$$f'(0) = -4{,}332 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot e^0 = -649{,}8 \cdot 10^{-4}$$

$$f'(\infty) = 0$$

Die Funktion ist streng monoton fallend, deshalb liegt der Zeitpunkt des stärksten Zerfalls von Radium zu Beobachtungsbeginn mit etwa  $-0.065\frac{y}{a}$ .

4.3.2 Bestand zum Zeitpunkt t: f(t)

Bestand a Jahre später: f(t + a)

Anteil von f(t + a) an f(t):

$$\frac{f(t+a)}{f(t)} = \frac{150 \cdot e^{-4,332 \cdot 10^{-4}(t+a)}}{150 \cdot e^{-4,332 \cdot 10^{-4}t}} = e^{-4,332 \cdot 10^{-4}a}$$

Somit hängt der Anteil nur vom Wert von a ab.

Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de