Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2) 2022-2023

2 Forscher gehen davon aus, dass bei der Herstellung von Zement im Zeitraum von Beginn des Jahres 1950 bis einschließlich 2010 weltweit rund $3 \cdot 10^{10}$ Tonnen Kohlendioxid (CO_2) freigesetzt wurden, d.h. pro Jahr wurden durchschnittlich etwa $4{,}9 \cdot 10^8$ Tonnen CO_2 freigesetzt.

2.1 Ein Quadratkilometer (km^2) Regenwald absorbiert jährlich rund 400 Tonnen CO_2 aus der Atmosphäre.
Ermitteln Sie, wie viele Quadratkilometer Regenwald nötig wären, um die durchschnittlich pro Jahr so freigesetzte Menge an CO_2 zu absorbieren.
Geben Sie an, um wie viel Prozent diese Regenwaldfläche von der Fläche Deutschlands (circa $357000\ km^2$) abweicht. (3P)

2.2 Andererseits absorbiert Zement, falls dieser zum Beispiel zu Beton verarbeitet wurde, im Laufe der Zeit wieder einen Teil des zuvor freigesetzten CO_2.
In der Tabelle sind die von den Forschern ermittelten Mengen an CO_2 aufgelistet, die weltweit in den betrachteten Jahren durch den verarbeiteten Zement absorbiert wurden.
Beispielsweise wurden im Jahr 1990 weltweit 255 Millionen Tonnen CO_2 durch den verarbeiteten Zement absorbiert.

Jahr	1950	1970	1990	2010
CO_2 in Tonnen	$3{,}7 \cdot 10^7$	$9{,}7 \cdot 10^7$	$25{,}5 \cdot 10^7$	$67{,}2 \cdot 10^7$

2.2.1 Die vom Zement absorbierte Menge an CO_2 ist im dargestellten Zeitraum exponentiell angewachsen. Erläutern Sie, wie dies aus den Daten hervorgeht. (2P)

2.2.2 Die Funktion m mit $m(t) = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot e^{kt}$ und $t \geq 0$ modelliert die jährlich absorbierte Menge an CO_2 in Tonnen. Dabei wird t in Jahren gemessen und $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 1950.

2.2.2.1 Zeigen Sie, dass die Wachstumskonstante k etwa den Wert $0{,}048$ hat. (2P)

2.2.2.2 Ermitteln Sie für den Zeitraum von Beginn des Jahres 1950 bis einschließlich 2010, wie viel Prozent der bei der Herstellung von Zement freigesetzten CO_2-Menge im selben Zeitraum wieder absorbiert wurden. (3P)

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2) 2022-2023

Aufgabe A3/2022

3 Ein Marktforschungsinstitut ermittelt zu Beginn des Jahres 2021 einen Marktanteil von $6\,\%$ der rein elektrisch angetriebenen Autos (E-Autos) unter allen neu zugelassenen Autos.
Die zukünftige Entwicklung dieses Marktanteils zum Zeitpunkt t wird im Folgenden durch die Funktion f mit $f(t) = 0{,}06 \cdot e^{0{,}04t};\ \ t \geq 0$ modelliert, wobei t in Monaten ab Beginn des Jahres 2021 gemessen wird.
Beispielsweise ist $f(1)$ der Marktanteil, den man zu Beginn des Monats Februar im Jahr 2021 für die E-Auto Neuzulassungen erwartet.

3.1 Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
(1) Zu Beginn des Monats Februar 2023 wird etwa jedes sechste neu zugelassene Auto ein E-Auto sein.
(2) Der Marktanteil der E-Autos wird im Jahr 2025 erstmalig $50\,\%$ übersteigen. (3P)

3.2 Begründen Sie, dass der Marktanteil der neu zugelassenen E-Autos um mehr als $60\,\%$ pro Jahr zunimmt. (2P)

3.3 Ermitteln Sie den durchschnittlichen Marktanteil der E-Autos unter allen neu zugelassenen Autos von Beginn des Jahres 2021 bis einschließlich 2025. (3P)

3.4 Im Folgenden wird mit der Funktion $g\colon\ t \to g(t)$ mit $t \geq 0$ die gesamte Anzahl der monatlich neu zugelassenen Autos zum Zeitpunkt t modelliert, wobei t die vergangene Zeit in Monaten ab Beginn des Jahres 2021 ist.
Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die durch die Bestimmung des Wertes des Integrals
$\int_3^{39} f(t) \cdot g(t)\, dt$
beantwortet werden kann. (2P)

Abituraufgaben anwendungsorientierte Analysis (Teil 2) 2022-2023

Aufgabe A4/2022

4 Die Mantelfläche einer ein Meter hohen Vase wird durch Rotation des Schaubilds der Funktion f mit
$f(x) = 0{,}014x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}625x + 1{,}7;\ \ 0 \leq x \leq 10$
um die x -Achse modelliert. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Dezimeter (dm) in der Realität. Die Dicke des Vasenbodens und die Wandstärke der Vase werden vernachlässigt.

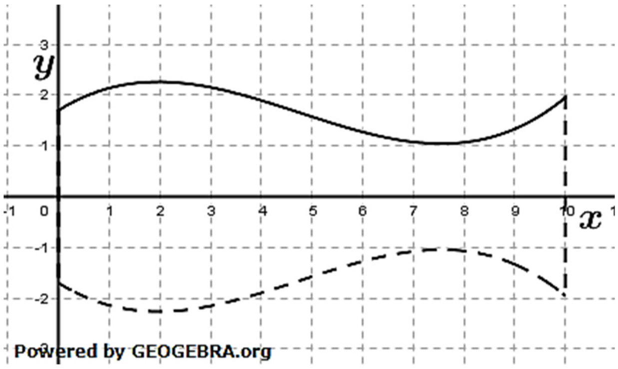


Abb.1: Modellierung der Vasenkontur mit f. Das Schaubild von f ist als durchgezogene Kurve dargestellt.

Abb. 2: Vase

4.1 Bestimmen Sie den Wert des Flächeninhalts des Bodens der Vase. Berechnen Sie die Differenz aus dem Durchmesser der Vasenöffnung und dem Durchmesser des Vasenbodens. (2P)

4.2 Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: *„Der größte Durchmesser der Vase ist größer als $4{,}4\ dm$."* (3P)

4.3 Es gilt $\pi \cdot \int_0^5 \left(f(x)\right)^2 dx \approx 65{,}57$.
Das Design der Vase soll nun geändert werden. Bis zu einer Höhe von $5\ dm$ soll dabei das Modell f beibehalten werden. Ab dieser Höhe wird eine Gerade verwendet, die sich knickfrei an das Schaubild von f anschließt.
Bestimmen Sie die Höhe der derart veränderten Vase, falls deren Fassungsvermögen insgesamt 70 Liter betragen soll. (5P)

Lösung A2/2022

2.1 *Regenwaldfläche zur Absorption von etwa $4{,}9 \cdot 10^8$ Tonnen CO_2:*

Ein Quadratkilometer (km^2) Regenwald absorbiert jährlich rund 400 Tonnen CO_2.

$A_{ges} = \frac{4{,}9 \cdot 10^8}{400} = 1225 \cdot 10^3\ km^2$

Abweichung in Prozent zur Gesamtfläche der BRD:

$\frac{A_{ges}}{A_{BRD}} \cdot 100 = \frac{1225 \cdot 10^3}{357 \cdot 10^3} \cdot 100 = 343{,}1\ \%$

Die Regenwaldfläche weicht um etwa $343\ \% - 100\ \% = 243\ \%$ ab.

2.2.1 *Nachweis exponentielles Wachstum:*

Ein Bestand wächst exponentiell, wenn er in gleichen Zeitschritten immer mit demselben Faktor zunimmt.

$\frac{CO_{2_{70}}}{CO_{2_{50}}} = \frac{9{,}7}{3{,}7} = 2{,}622;\quad \frac{CO_{2_{90}}}{CO_{2_{70}}} = \frac{25{,}5}{9{,}7} = 2{,}629;\quad \frac{CO_{2_{10}}}{CO_{2_{90}}} = \frac{67{,}2}{25{,}5} = 2{,}635$

Da in gleichen Zeitschritten (20 Jahre) die Menge an CO_2 um den Faktor $2{,}6$ ansteigt, handelt es sich um exponentielles Wachstum.

2.2.2.1 *Nachweis der Wachstumskonstante k:*

$m(t) = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot e^{kt}$ | Punktprobe mit 1970

$9{,}7 \cdot 10^7 = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot e^{20k}$

$e^{20k} = 2{,}6216$ | ln

$20k = \ln(2{,}6216)$

$k = \frac{1}{20}\ln(2{,}6216) = 0{,}048$

2.2.2.2 *Prozentuales Verhältnis absorbiertes zu freigesetztes CO_2:*

Insgesamt freigesetztes CO_2: $3 \cdot 10^{10}$ Tonnen

Insgesamt absorbiertes CO_2: $\int_0^{61} m(t)\ dt$ Tonnen

$m_{2010} = 3{,}7 \cdot 10^7 \int_0^{61} e^{0{,}048t}\ dt = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot \left[\frac{e^{0{,}048t}}{0{,}048}\right]_0^{61}$

$= \frac{3{,}7 \cdot 10^7}{0{,}048} \cdot (e^{0{,}048 \cdot 61} - 1) = 1{,}364 \cdot 10^{10}$

$\frac{m_{absorbiert}}{m_{freigesetzt}} = \frac{1{,}364 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{10}} = 0{,}455 \approx 45{,}5\ \%$

Der gesuchte prozentuale Anteil beträgt ca. $45{,}5\ \%$.

Lösung A3/2022

3.1 *Beurteilung zweier Aussagen:*

(1) Zu Beginn des Monats Februar 2023 wird etwa jedes sechste neu zugelassene Auto ein E-Auto sein.
Der Beginn des Monats Februar ist gemäß Aufgabenstellung $f(1)$.

$$f(1) = 0{,}06 \cdot e^{0{,}04} = 0{,}062 \approx \frac{6}{100} = 6\ \%$$

Die Aussage ist korrekt.

(2) Der Marktanteil der E-Autos wird im Jahr 2025 erstmalig 50 % übersteigen.
Wir berechnen $f(t) = 0{,}5$:

$$0{,}06 \cdot e^{0{,}04t} = 0{,}5 \quad | \quad :0{,}06$$

$$e^{0{,}04t} = \frac{0{,}5}{0{,}06} = \frac{25}{3} \quad | \quad ln$$

$$0{,}04t = \ln\left(\frac{25}{3}\right) \quad | \quad :0{,}04$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{25}{3}\right)}{0{,}04} = 53$$

Von 2021 bis Ende 2024 sinbd es 48 Monate bis Ende 2025 60 Monate. Die Aussage ist korrekt.

3.2 *Begründung der Zunahme des Marktanteils von jährlich etwa 60 %.*

$$\frac{f(t+12)}{f(t)} \cdot 100 = \frac{0{,}06 \cdot e^{0{,}04(t+12)}}{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}} = \frac{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}}{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}} \cdot e^{0{,}48} = e^{0{,}48} = 1{,}62$$

Der Faktor 1,62 entspricht einem jährlichen Zuwachs von ca. 62 %. Daher beträgt die jährliche prozentuale Zunahme mehr als 60 %.

3.3 *Durchschnittlicher Marktanteil der E-Autos von Anfang 2021 bis Ende 2025:*

$$\overline{m} = \frac{1}{60} \int_0^{60} 0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}\, dt = \frac{0{,}06}{60} \left[\frac{e^{0{,}04t}}{0{,}04}\right]_0^{60} = \frac{1}{40}\left(e^{2{,}4} - 1\right) = 0{,}2505$$

Der durchschnittliche Marktanteil der E-Autos beträgt etwa 25 %.

3.4 *Frage im Sachzusammenhang, die durch die Bestimmung des Wertes des Integrals $\int_3^{39} f(t) \cdot g(t)\, dt$ beantwortet wird:*
Der Zeitraum $t = 3$ bis $t = 39$ entspricht den Zeitpunkten Beginn April 2021 bis Beginn März 2024.
Das Produkt $f(t) \cdot g(t)$ entspricht der Anzahl der neu zugelassenen E-Autos zum Zeitpunkt t.
Durch das Integral wird die Summe aller neu zugelassenen E-Autos berechnet im Zeitraum Beginn April 2021 bis Beginn März 2024.

Lösung A4/2022

4.1 *Flächeninhakt Vasenboden:*
Dies ist ein Kreis mit Radius $r = f(0) = 2{,}7$
$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1{,}7^2 = 9{,}08$
Der Vasenboden hat eine Fläche von etwa $9\ dm^2$.
Differenz aus dem Durchmesser der Vasenöffnung und dem Durchmesser des Vasenbodens.
$d = 2 \cdot \left(f(10) - f(0)\right) = 2 \cdot (1{,}95 - 1{,}7) = 0{,}5\ dm$

4.2 *größter Durchmesser der Vase.*
Dieser liegt im Hochpunkt von f vor.
$f'(x) = 0{,}042x^2 - 0{,}4x + 0{,}625$
$0{,}042x^2 - 0{,}4x + 0{,}625 = 0 \mid \quad : 0{,}042$
$x^2 - 9{,}52x + 14{,}88 = 0$
$x_{1,2} = 4{,}72 \pm \sqrt{22{,}28 - 14{,}88} = 4{,}72 \pm 2{,}72$
$x_1 = 7{,}44;\ \ x_2 = 2$
$f(7{,}44) = 0{,}014 \cdot 7{,}44^3 - 0{,}2 \cdot 7{,}44^2 + 0{,}625 \cdot 7{,}44 + 1{,}7 = 1{,}04$
$f(2) = 0{,}014 \cdot 8 - 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}625 \cdot 2 + 1{,}7 = 2{,}262$
$d_{max} = 2 \cdot f(2) = 4{,}524\ dm$
Der größte Durchmesser der Vase ist größer als $4{,}4\ \mathrm{dm}$.
Die Aussage ist wahr.

4.3 *Höhe einer profilveränderten Vase:*
Wir benötigen die Gleichung einer Tangente im Punkt $P(5|f(5))$.
$t(x) = f'(5) \cdot (x - 5) + f(5)$
$f'(5) = 0{,}042 \cdot 5^2 - 0{,}4 \cdot 5 + 0{,}625 = -0{,}325$
$f(5) = 0{,}014 \cdot 5^3 - 0{,}2 \cdot 5^2 + 0{,}625 \cdot 5 + 1{,}7 = 1{,}575$
$t(x) = -0{,}325 \cdot (x - 5) + 1{,}575$

$t(x) = -0{,}325x + 3{,}2$

Das Volumen der Vase bis zur Stelle $x_0 = 5$ beträgt $65{,}57\,dm^3$. Die Differenz bis $70\,l = 70\,dm^3$ ist somit $4{,}43\,dm^3$. Die Rotation der Tangente um die x-Achse im Intervall $[5;h]$ mit h als neuer Vasenhöhe muss diese Differenz erzeugen. Will man den Wert von h über ein Rotationsintegral bestimmen, gelangt man zu einer kubischen Gleichung, die mit den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln nicht lösbar ist. Somit ist nur die Lösung über das Volumen eines Kegelstumpfes möglich.

Ab der Stelle $x = 5$ wird das Volumen durch einen Kegel bestimmt. An der Stelle $x = 5$ beträgt der Radius dieses Kegels $r = f(5) = 1{,}575$

Nullstelle der Tangente $t(x)$:

$-0{,}325x + 3{,}2 = 0$ ➔ $x = 9{,}85$

Die Höhe des Vollkegels damit $h_{Krg} = 9{,}85 - 5 = 4{,}85\,dm$

Das Volumen des Vollkegels ist somit:

$$V_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}575^2 \cdot 4{,}85 = 12{,}6\,dm^3$$

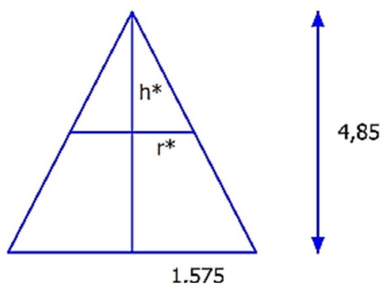
Die Volumenvergrößerung soll aber nur $4{,}43\,dm^3$ betragen. Also müssen wir den Vollkegel um

$12{,}6 - 4{,}43 = 8{,}17\,dm^3$ verkleinern.

$$V_{Keg^*} = 8{,}17 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^{*2} \cdot h^*$$

Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

$$\frac{h_{Keg}}{r_{Keg}} = \frac{h_{Keg^*}}{r_{Keg^*}} = \frac{4{,}85}{1{,}575}$$



$$r_{Keg^*} = \frac{1{,}575 \cdot h_{Keg^*}}{4{,}85}$$

$$r_{Keg^*} \to V_{Keg^*}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1{,}575 \cdot h_{Keg^*}}{4{,}85}\right)^2 \cdot h_{Keg}^* = 8{,}17$$

$$0{,}1104\, {h_{Keg}^*}^3 = 8{,}17$$

$$h_{Keg^*} = \sqrt[3]{73{,}98} = 4{,}19$$

Der Vollkegel muss um $4{,}19\,dm$ gekürzt werden. Für den Stumpf verbeibt somit eine Höhe von $4{,}85 - 4{,}19 = 0{,}66\,dm$

Die neue Höhe der Vase ist $5 + 0{,}66 = 5{,}66\,dm$.

Lösung A2/2022

2.1 *Regenwaldfläche zur Absorption von etwa* $4{,}9 \cdot 10^8$ *Tonnen* CO_2*:*

Ein Quadratkilometer (km^2) Regenwald absorbiert jährlich rund 400 Tonnen CO_2.

$A_{ges} = \frac{4{,}9 \cdot 10^8}{400} = 1225 \cdot 10^3\ km^2$

Abweichung in Prozent zur Gesamtfläche der BRD:

$\frac{A_{ges}}{A_{BRD}} \cdot 100 = \frac{1225 \cdot 10^3}{357 \cdot 10^3} \cdot 100 = 343{,}1\ \%$

Die Regenwaldfläche weicht um etwa $343\ \% - 100\ \% = 243\ \%$ ab.

2.2.1 *Nachweis exponentielles Wachstum:*

Ein Bestand wächst exponentiell, wenn er in gleichen Zeitschritten immer mit demselben Faktor zunimmt.

$\frac{CO_{2_{70}}}{CO_{2_{50}}} = \frac{9{,}7}{3{,}7} = 2{,}622;\quad \frac{CO_{2_{90}}}{CO_{2_{70}}} = \frac{25{,}5}{9{,}7} = 2{,}629;\quad \frac{CO_{2_{10}}}{CO_{2_{90}}} = \frac{67{,}2}{25{,}5} = 2{,}635$

Da in gleichen Zeitschritten (20 Jahre) die Menge an CO_2 um den Faktor $2{,}6$ ansteigt, handelt es sich um exponentielles Wachstum.

2.2.2.1 *Nachweis der Wachstumskonstante* k*:*

$m(t) = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot e^{kt}$ | Punktprobe mit 1970

$9{,}7 \cdot 10^7 = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot e^{20k}$

$e^{20k} = 2{,}6216$ | ln

$20k = \ln(2{,}6216)$

$k = \frac{1}{20}\ln(2{,}6216) = 0{,}048$

2.2.2.2 *Prozentuales Verhältnis absorbiertes zu freigesetztes* CO_2*:*

Insgesamt freigesetztes CO_2: $3 \cdot 10^{10}$ Tonnen

Insgesamt absorbiertes CO_2: $\int_0^{61} m(t)\ dt$ Tonnen

$$m_{2010} = 3{,}7 \cdot 10^7 \int_0^{61} e^{0{,}048t}\ dt = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot \left[\frac{e^{0{,}048t}}{0{,}048}\right]_0^{61}$$

$$= \frac{3{,}7 \cdot 10^7}{0{,}048} \cdot (e^{0{,}048 \cdot 61} - 1) = 1{,}364 \cdot 10^{10}$$

$$\frac{m_{absorbiert}}{m_{freigesetzt}} = \frac{1{,}364 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{10}} = 0{,}455 \approx 45{,}5\ \%$$

Der gesuchte prozentuale Anteil beträgt ca. $45{,}5\ \%$.

Lösung A3/2022

3.1 *Beurteilung zweier Aussagen:*

(1) Zu Beginn des Monats Februar 2023 wird etwa jedes sechste neu zugelassene Auto ein E-Auto sein.
Der Beginn des Monats Februar ist gemäß Aufgabenstellung $f(1)$.

$$f(1) = 0{,}06 \cdot e^{0{,}04} = 0{,}062 \approx \frac{6}{100} = 6\ \%$$

Die Aussage ist korrekt.

(2) Der Marktanteil der E-Autos wird im Jahr 2025 erstmalig 50 % übersteigen.
Wir berechnen $f(t) = 0{,}5$:

$$0{,}06 \cdot e^{0{,}04t} = 0{,}5 \quad | \quad :0{,}06$$

$$e^{0{,}04t} = \frac{0{,}5}{0{,}06} = \frac{25}{3} \quad | \quad ln$$

$$0{,}04t = \ln\left(\frac{25}{3}\right) \quad | \quad :0{,}04$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{25}{3}\right)}{0{,}04} = 53$$

Von 2021 bis Ende 2024 sinbd es 48 Monate bis Ende 2025 60 Monate. Die Aussage ist korrekt.

3.2 *Begründung der Zunahme des Marktanteils von jährlich etwa 60 %.*

$$\frac{f(t+12)}{f(t)} \cdot 100 = \frac{0{,}06 \cdot e^{0{,}04(t+12)}}{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}} = \frac{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}}{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}} \cdot e^{0{,}48} = e^{0{,}48} = 1{,}62$$

Der Faktor 1,62 entspricht einem jährlichen Zuwachs von ca. 62 %. Daher beträgt die jährliche prozentuale Zunahme mehr als 60 %.

3.3 *Durchschnittlicher Marktanteil der E-Autos von Anfang 2021 bis Ende 2025:*

$$\overline{m} = \frac{1}{60} \int_0^{60} 0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}\, dt = \frac{0{,}06}{60} \left[\frac{e^{0{,}04t}}{0{,}04}\right]_0^{60} = \frac{1}{40}\left(e^{2{,}4} - 1\right) = 0{,}2505$$

Der durchschnittliche Marktanteil der E-Autos beträgt etwa 25 %.

3.4 *Frage im Sachzusammenhang, die durch die Bestimmung des Wertes des Integrals $\int_3^{39} f(t)\cdot g(t)\,dt$ beantwortet wird:*
Der Zeitraum $t = 3$ bis $t = 39$ entspricht den Zeitpunkten Beginn April 2021 bis Beginn März 2024.
Das Produkt $f(t)\cdot g(t)$ entspricht der Anzahl der neu zugelassenen E-Autos zum Zeitpunkt t.
Durch das Integral wird die Summe aller neu zugelassenen E-Autos berechnet im Zeitraum Beginn April 2021 bis Beginn März 2024.

Lösung A4/2022

4.1 *Flächeninhakt Vasenboden:*
Dies ist ein Kreis mit Radius $r = f(0) = 2{,}7$
$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1{,}7^2 = 9{,}08$
Der Vasenboden hat eine Fläche von etwa $9\ dm^2$.
Differenz aus dem Durchmesser der Vasenöffnung und dem Durchmesser des Vasenbodens.
$d = 2\cdot\big(f(10) - f(0)\big) = 2\cdot(1{,}95 - 1{,}7) = 0{,}5\ dm$

4.2 *größter Durchmesser der Vase.*
Dieser liegt im Hochpunkt von f vor.
$f'(x) = 0{,}042x^2 - 0{,}4x + 0{,}625$
$0{,}042x^2 - 0{,}4x + 0{,}625 = 0 \quad| \quad :0{,}042$
$x^2 - 9{,}52x + 14{,}88 = 0$
$x_{1,2} = 4{,}72 \pm \sqrt{22{,}28 - 14{,}88} = 4{,}72 \pm 2{,}72$
$x_1 = 7{,}44;\ \ x_2 = 2$
$f(7{,}44) = 0{,}014\cdot 7{,}44^3 - 0{,}2\cdot 7{,}44^2 + 0{,}625\cdot 7{,}44 + 1{,}7 = 1{,}04$
$f(2) = 0{,}014\cdot 8 - 0{,}2\cdot 4 + 0{,}625\cdot 2 + 1{,}7 = 2{,}262$
$d_{max} = 2\cdot f(2) = 4{,}524\ dm$
Der größte Durchmesser der Vase ist größer als $4{,}4\ \mathrm{dm}$.
Die Aussage ist wahr.

4.3 *Höhe einer profilveränderten Vase:*
Wir benötigen die Gleichung einer Tangente im Punkt $P(5|f(5))$.
$t(x) = f'(5)\cdot(x-5) + f(5)$
$f'(5) = 0{,}042\cdot 5^2 - 0{,}4\cdot 5 + 0{,}625 = -0{,}325$
$f(5) = 0{,}014\cdot 5^3 - 0{,}2\cdot 5^2 + 0{,}625\cdot 5 + 1{,}7 = 1{,}575$
$t(x) = -0{,}325\cdot(x-5) + 1{,}575$

$t(x) = -0{,}325x + 3{,}2$

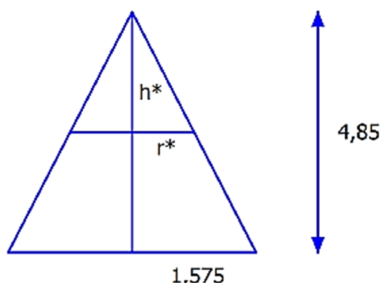
Das Volumen der Vase bis zur Stelle $x_0 = 5$ beträgt $65{,}57\,dm^3$. Die Differenz bis $70\,l = 70\,dm^3$ ist somit $4{,}43\,dm^3$.
Die Rotation der Tangente um die x-Achse im Intervall $[5; h]$ mit h als neuer Vasenhöhe muss diese Differenz erzeugen. Will man den Wert von h über ein Rotationsintegral bestimmen, gelangt man zu einer kubischen Gleichung, die mit den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln nicht lösbar ist. Somit ist nur die Lösung über das Volumen eines Kegelstumpfes möglich.
Ab der Stelle $x = 5$ wird das Volumen durch einen Kegel bestimmt. An der Stelle $x = 5$ beträgt der Radius dieses Kegels $r = f(5) = 1{,}575$
Nullstelle der Tangente $t(x)$:
$-0{,}325x + 3{,}2 = 0$ ➔ $x = 9{,}85$
Die Höhe des Vollkegels damit $h_{Krg} = 9{,}85 - 5 = 4{,}85\,dm$
Das Volumen des Vollkegels
ist somit:

$$V_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}575^2 \cdot 4{,}85 = 12{,}6\,dm^3$$

Die Volumenvergrößerung soll aber nur $4{,}43\,dm^3$ betragen. Also müssen wir den Vollkegel um
$12{,}6 - 4{,}43 = 8{,}17\,dm^3$ verkleinern.

$$V_{Keg^*} = 8{,}17 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^{*2} \cdot h^*$$

Nach dem 2. Strahlensatz gilt:



$$\frac{h_{Keg}}{r_{Keg}} = \frac{h_{Keg^*}}{r_{Keg^*}} = \frac{4{,}85}{1{,}575}$$
$$r_{Keg^*} = \frac{1{,}575 \cdot h_{Keg^*}}{4{,}85}$$
$$r_{Keg^*} \to V_{Keg^*}$$
$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1{,}575 \cdot h_{Keg^*}}{4{,}85}\right)^2 \cdot h_{Keg}^* = 8{,}17$$
$$0{,}1104\, {h_{Keg}^*}^3 = 8{,}17$$
$$h_{Keg^*} = \sqrt[3]{73{,}98} = 4{,}19$$

Der Vollkegel muss um $4{,}19\,dm$ gekürzt werden. Für den Stumpf verbeibt somit eine Höhe von $4{,}85 - 4{,}19 = 0{,}66\,dm$
Die neue Höhe der Vase ist $5 + 0{,}66 = 5{,}66\,dm$.