Lösung A2/2022

2.1 *Regenwaldfläche zur Absorption von etwa $4{,}9 \cdot 10^8$ Tonnen CO_2:*

Ein Quadratkilometer (km^2) Regenwald absorbiert jährlich rund 400 Tonnen CO_2.

$A_{ges} = \frac{4{,}9 \cdot 10^8}{400} = 1225 \cdot 10^3\ km^2$

Abweichung in Prozent zur Gesamtfläche der BRD:

$\frac{A_{ges}}{A_{BRD}} \cdot 100 = \frac{1225 \cdot 10^3}{357 \cdot 10^3} \cdot 100 = 343{,}1\ \%$

Die Regenwaldfläche weicht um etwa $343\ \% - 100\ \% = 243\ \%$ ab.

2.2.1 *Nachweis exponentielles Wachstum:*

Ein Bestand wächst exponentiell, wenn er in gleichen Zeitschritten immer mit demselben Faktor zunimmt.

$\frac{CO_{2_{70}}}{CO_{2_{50}}} = \frac{9{,}7}{3{,}7} = 2{,}622;\quad \frac{CO_{2_{90}}}{CO_{2_{70}}} = \frac{25{,}5}{9{,}7} = 2{,}629;\quad \frac{CO_{2_{10}}}{CO_{2_{90}}} = \frac{67{,}2}{25{,}5} = 2{,}635$

Da in gleichen Zeitschritten (20 Jahre) die Menge an CO_2 um den Faktor $2{,}6$ ansteigt, handelt es sich um exponentielles Wachstum.

2.2.2.1 *Nachweis der Wachstumskonstante k:*

$m(t) = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot e^{kt}$ | Punktprobe mit 1970

$9{,}7 \cdot 10^7 = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot e^{20k}$

$e^{20k} = 2{,}6216$ | ln

$20k = \ln(2{,}6216)$

$k = \frac{1}{20}\ln(2{,}6216) = 0{,}048$

2.2.2.2 *Prozentuales Verhältnis absorbiertes zu freigesetztes CO_2:*

Insgesamt freigesetztes CO_2: $3 \cdot 10^{10}$ Tonnen

Insgesamt absorbiertes CO_2: $\int_0^{61} m(t)\ dt$ Tonnen

$$m_{2010} = 3{,}7 \cdot 10^7 \int_0^{61} e^{0{,}048t}\ dt = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot \left[\frac{e^{0{,}048t}}{0{,}048}\right]_0^{61}$$

$$= \frac{3{,}7 \cdot 10^7}{0{,}048} \cdot \left(e^{0{,}048 \cdot 61} - 1\right) = 1{,}364 \cdot 10^{10}$$

$$\frac{m_{absorbiert}}{m_{freigesetzt}} = \frac{1{,}364 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{10}} = 0{,}455 \approx 45{,}5\ \%$$

Der gesuchte prozentuale Anteil beträgt ca. $45{,}5\ \%$.

Lösung A3/2022

3.1 *Beurteilung zweier Aussagen:*

(1) Zu Beginn des Monats Februar 2023 wird etwa jedes sechste neu zugelassene Auto ein E-Auto sein.
Der Beginn des Monats Februar ist gemäß Aufgabenstellung $f(1)$.
$f(1) = 0{,}06 \cdot e^{0{,}04} = 0{,}062 \approx \frac{6}{100} = 6\,\%$
Die Aussage ist korrekt.

(2) Der Marktanteil der E-Autos wird im Jahr 2025 erstmalig 50 % übersteigen.
Wir berechnen $f(t) = 0{,}5$:

$$0{,}06 \cdot e^{0{,}04t} = 0{,}5 \quad | \quad :0{,}06$$
$$e^{0{,}04t} = \frac{0{,}5}{0{,}06} = \frac{25}{3} \quad | \quad ln$$
$$0{,}04t = \ln\left(\frac{25}{3}\right) \quad | \quad :0{,}04$$
$$t = \frac{\ln\left(\frac{25}{3}\right)}{0{,}04} = 53$$

Von 2021 bis Ende 2024 sinbd es 48 Monate bis Ende 2025 60 Monate. Die Aussage ist korrekt.

3.2 *Begründung der Zunahme des Marktanteils von jährlich etwa 60 %.*

$$\frac{f(t+12)}{f(t)} \cdot 100 = \frac{0{,}06 \cdot e^{0{,}04(t+12)}}{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}} = \frac{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}}{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}} \cdot e^{0{,}48} = e^{0{,}48} = 1{,}62$$

Der Faktor 1,62 entspricht einem jährlichen Zuwachs von ca. 62 %. Daher beträgt die jährliche prozentuale Zunahme mehr als 60 %.

3.3 *Durchschnittlicher Marktanteil der E-Autos von Anfang 2021 bis Ende 2025:*

$$\overline{m} = \frac{1}{60}\int_0^{60} 0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}\,dt = \frac{0{,}06}{60}\left[\frac{e^{0{,}04t}}{0{,}04}\right]_0^{60} = \frac{1}{40}\left(e^{2{,}4} - 1\right) = 0{,}2505$$

Der durchschnittliche Marktanteil der E-Autos beträgt etwa 25 %.

3.4 *Frage im Sachzusammenhang, die durch die Bestimmung des Wertes des Integrals $\int_3^{39} f(t) \cdot g(t)\, dt$ beantwortet wird:*

Der Zeitraum $t = 3$ bis $t = 39$ entspricht den Zeitpunkten Beginn April 2021 bis Beginn März 2024.
Das Produkt $f(t) \cdot g(t)$ entspricht der Anzahl der neu zugelassenen E-Autos zum Zeitpunkt t.
Durch das Integral wird die Summe aller neu zugelassenen E-Autos berechnet im Zeitraum Beginn April 2021 bis Beginn März 2024.

Lösung A4/2022

4.1 *Flächeninhakt Vasenboden:*

Dies ist ein Kreis mit Radius $r = f(0) = 2{,}7$
$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1{,}7^2 = 9{,}08$
Der Vasenboden hat eine Fläche von etwa $9\ dm^2$.
Differenz aus dem Durchmesser der Vasenöffnung und dem Durchmesser des Vasenbodens.
$d = 2 \cdot \left(f(10) - f(0)\right) = 2 \cdot (1{,}95 - 1{,}7) = 0{,}5\ dm$

4.2 *größter Durchmesser der Vase.*

Dieser liegt im Hochpunkt von f vor.
$f'(x) = 0{,}042x^2 - 0{,}4x + 0{,}625$
$0{,}042x^2 - 0{,}4x + 0{,}625 = 0 \mid \quad : 0{,}042$
$x^2 - 9{,}52x + 14{,}88 = 0$
$x_{1,2} = 4{,}72 \pm \sqrt{22{,}28 - 14{,}88} = 4{,}72 \pm 2{,}72$
$x_1 = 7{,}44;\ \ x_2 = 2$
$f(7{,}44) = 0{,}014 \cdot 7{,}44^3 - 0{,}2 \cdot 7{,}44^2 + 0{,}625 \cdot 7{,}44 + 1{,}7 = 1{,}04$
$f(2) = 0{,}014 \cdot 8 - 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}625 \cdot 2 + 1{,}7 = 2{,}262$
$d_{max} = 2 \cdot f(2) = 4{,}524\ dm$
Der größte Durchmesser der Vase ist größer als $4{,}4\ \mathrm{dm}$.
Die Aussage ist wahr.

4.3 *Höhe einer profilveränderten Vase:*

Wir benötigen die Gleichung einer Tangente im Punkt $P(5|f(5))$.
$t(x) = f'(5) \cdot (x - 5) + f(5)$
$f'(5) = 0{,}042 \cdot 5^2 - 0{,}4 \cdot 5 + 0{,}625 = -0{,}325$
$f(5) = 0{,}014 \cdot 5^3 - 0{,}2 \cdot 5^2 + 0{,}625 \cdot 5 + 1{,}7 = 1{,}575$
$t(x) = -0{,}325 \cdot (x - 5) + 1{,}575$

$t(x) = -0{,}325x + 3{,}2$
Das Volumen der Vase bis zur Stelle $x_0 = 5$ beträgt $65{,}57\ dm^3$. Die Differenz bis $70\ l = 70\ dm^3$ ist somit $4{,}43\ dm^3$.
Die Rotation der Tangente um die x-Achse im Intervall $[5; h]$ mit h als neuer Vasenhöhe muss diese Differenz erzeugen. Will man den Wert von h über ein Rotationsintegral bestimmen, gelangt man zu einer kubischen Gleichung, die mit den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln nicht lösbar ist. Somit ist nur die Lösung über das Volumen eines Kegelstumpfes möglich.
Ab der Stelle $x = 5$ wird das Volumen durch einen Kegel bestimmt. An der Stelle $x = 5$ beträgt der Radius dieses Kegels $r = f(5) = 1{,}575$
Nullstelle der Tangente $t(x)$:
$-0{,}325x + 3{,}2 = 0 \quad ➔ \quad x = 9{,}85$
Die Höhe des Vollkegels damit $h_{Krg} = 9{,}85 - 5 = 4{,}85\ dm$
Das Volumen des Vollkegels ist somit:

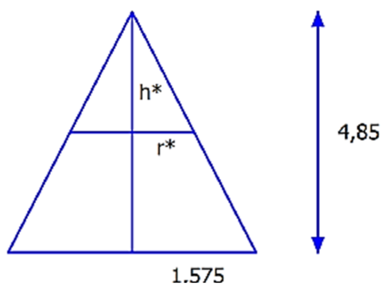
$$V_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}575^2 \cdot 4{,}85 = 12{,}6\ dm^3$$

Die Volumenvergrößerung soll aber nur $4{,}43\ dm^3$ betragen.
Also müssen wir den Vollkegel um
$12{,}6\ - 4{,}43 = 8{,}17\ dm^3$ verkleinern.

$$V_{Keg^*} = 8{,}17 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^{*2} \cdot h^*$$

Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

$$\frac{h_{Keg}}{r_{Keg}} = \frac{h_{Keg^*}}{r_{Keg^*}} = \frac{4{,}85}{1{,}575}$$



$$r_{Keg^*} = \frac{1{,}575 \cdot h_{Keg^*}}{4{,}85}$$
$$r_{Keg^*} \rightarrow V_{Keg^*}$$
$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1{,}575 \cdot h_{Keg^*}}{4{,}85}\right)^2 \cdot h_{Keg}^* = 8{,}17$$
$$0{,}1104\ {h_{Keg}^*}^3 = 8{,}17$$
$$h_{Keg^*} = \sqrt[3]{73{,}98} = 4{,}19$$

Der Vollkegel muss um $4{,}19\ dm$ gekürzt werden. Für den Stumpf verbeibt somit eine Höhe von $4{,}85 - 4{,}19 = 0{,}66\ dm$
Die neue Höhe der Vase ist $5 + 0{,}66 = 5{,}66\ dm$.