

**Abituraufgaben Analysis BG** (Teil 2 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**

Diese Aufgaben sind zu bearbeiten. Sie können nicht abgewählt werden.

**Aufgabe A1**

1. Gegeben ist die Funktion  $f$  mit

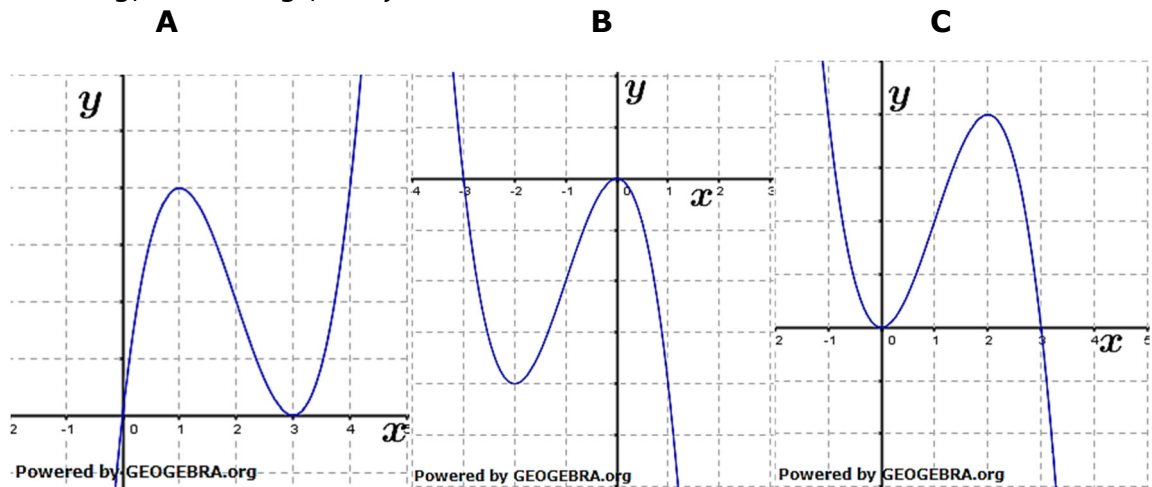
$$f(x) = -2x^2(x - 3); \quad x \in \mathbb{R}$$

Das Schaubild von  $f$  ist  $K$ .



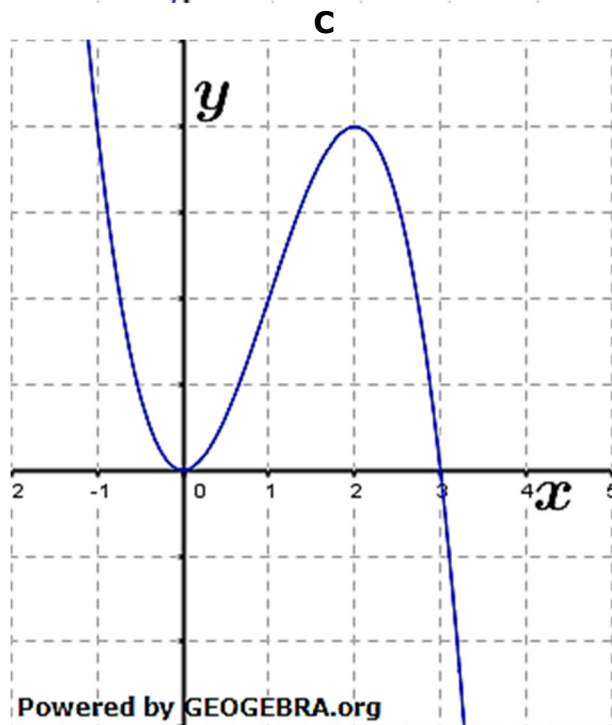
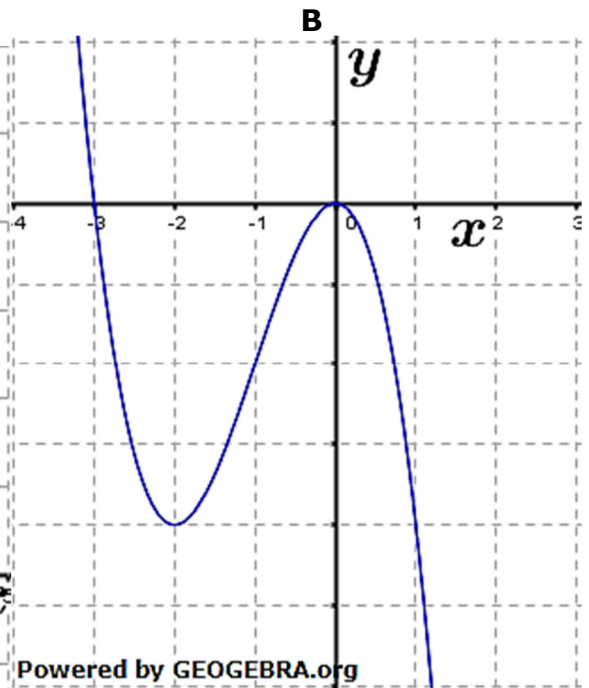
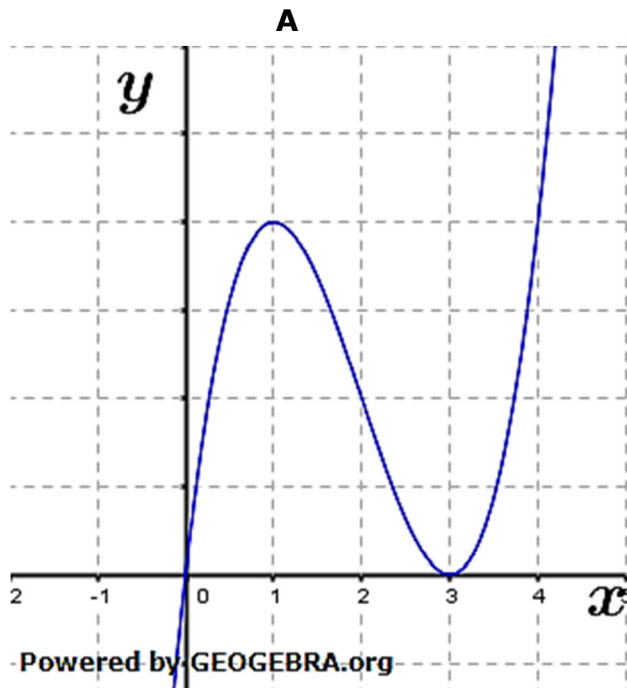
- 1.1 Eine der folgenden Abbildung zeigt das Schaubild  $K$ .  
Untersuche für jede der Abbildungen, ob es sich um das Schaubild  $K$  handeln kann.  
Skaliere auf dem beiliegenden Arbeitsblatt bei derjenigen Abbildung, die  $K$  zeigt, die  $y$ -Achse.

**6P**



- 1.2 Berechne den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von  $K$  mit der  $x$ -Achse einschließt. **5P**
- 1.3 Die Gerade mit der Gleichung  $y = -4x + 8$  zerlegt die Fläche zwischen  $K$  und der  $x$ -Achse in zwei Teilflächen. **5P**  
Ermittle einen Term, mit dem der Inhalt einer der beiden Teilflächen berechnet werden kann und kennzeichne in der Abbildung aus 1.1 auf dem Arbeitsblatt die von dir gewählte Fläche.
- 1.4 Die Abbildung A zeigt das Schaubild einer Funktion  $g$ . **4P**  
Begründe, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
1.  $g''(3) < 0$
  2. Bei  $x = 1$  hat  $g'$  einen Vorzeichenwechsel von  $+$  nach  $-$ .
  3. An der Stelle  $x = 2$  hat das Schaubild von  $g'$  einen Hochpunkt.
  4. Die momentane Änderungsrate von  $g$  an der Stelle  $x = 3$  ist größer als die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall  $[1; 2]$ .

**Abituraufgaben Analysis BG** (Teil 2 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**  
Arbeitsblatt:



**Abituraufgaben Analysis BG** (Teil 2 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**  
**Aufgabe A2**

1.1 Gegeben ist die Funktion  $f$  mit

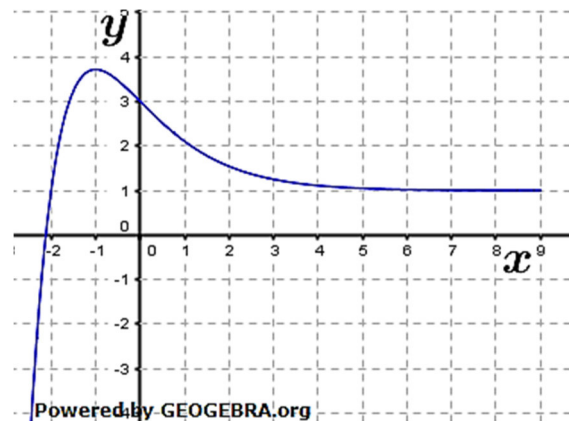
$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 1; \quad x \in \mathbb{R}$$

Das Schaubild von  $f$  ist  $K$ .

1.1.1 Wie entsteht das Schaubild  $K$  aus der Sinuskurve mit  $y = \sin(x)$ ?  
Skizziere  $K$ . **7P**

1.1.2 Gib die Koordinaten von zwei benachbarten Wendepunkten von  $K$  an.  
Bestimme eine Gleichung der Ursprungsgeraden, die parallel ist zur  
Normalen an  $K$  in einem dieser Wendepunkte. **6P**

1.2 Das nebenstehende Schaubild  $K_g$   
gehört zu einer Funktion  $g$  mit  
 $g(x) = (x+a) \cdot e^{-x} + b$ .



1.2.1  $G$  ist eine Stammfunktion von  $g$ . **4P**

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?

Begründe:

1. Das Schaubild von  $g$  besitzt eine schiefe Asymptote,  
die parallel zur 1. Winkelhalbierenden ist.
2. Das Schaubild von  $G$  besitzt an der Stelle  $x = -1$  einen Hochpunkt.

1.2.2 Bestimme  $a$  und  $b$ . **3P**

**Abituraufgaben Analysis BG** (Teil 2 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**

**Aufgabe A3**

1. Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^{x-1} - x$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .  
Das Schaubild der Funktion  $f$  heißt  $K$ .
  - 1.1 Zeichne das Schaubild  $K$  in ein Koordinatensystem ein. **5P**  
Gib die Gleichung der Asymptote von  $K$  an und zeichne sie ebenfalls ein.
  - 1.2 Untersuche  $K$  auf Extrempunkte. **4P**
  - 1.3 Das Schaubild  $K$  und die 2. Winkelhalbierende schließen mit der  $y$ -Achse und der Geraden mit der Gleichung  $x = a$  für  $a < 0$  eine Fläche ein. Bestimme den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von  $a$ . Gegen welchen Wert strebt dieser Flächeninhalt für  $a \rightarrow -\infty$ ? **4P**
  - 1.4 Das zur  $y$ -Achse symmetrische Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades schneidet die  $y$ -Achse im Punkt  $S(0|2)$ , es hat an der Stelle  $x = 1$  die Steigung  $-4$  und einen Extrempunkt an der Stelle  $x = \sqrt{2}$ . Bestimme den zugehörigen Funktionsterm. **4P**
  - 1.5 Zeige: Die Wendestelle einer Polynomfunktion 3. Grades liegt bei  $x = -2$ , wenn die Koeffizienten von  $x^3$  und  $x^2$  das Verhältnis 1:6 haben. **3P**

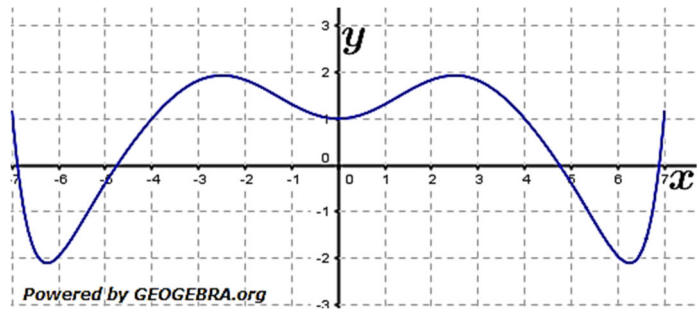
**Aufgabe A4**

1. Die Funktion  $g$  mit  $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .  
Das Schaubild von  $g$  ist  $K$ .
  - 1.1 Untersuche  $K$  auf Symmetrie. **7P**  
Berechne die Koordinaten der Extrempunkte von  $K$ .  
Zeichne  $K$ .
  - 1.2 Die beiden Wendetangenten begrenzen mit  $K$  eine Fläche. **5P**  
Berechne den Inhalt dieser Fläche.
  - 1.3 Betrachte nun die Funktion  $w$  mit  $w(x) = -4x^2 + 4$ ;  $x \in \mathbb{R}$ . **4P**  
Die Schaubilder von  $g$  und  $w$  schneiden sich in  $x_1 = -1$  und  $x_2 = 1$ .  
Das Flächenstück, das von den beiden Schaubildern eingeschlossen wird, rotiert um die  $x$ -Achse. Geben Sie einen Rechenansatz zur Berechnung des Volumens des entstehenden Rotationskörpers an.

## Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**

- 1.4 Gegeben ist das Schaubild einer Funktion  $f$  mit dem Definitionsbereich  $[-7; 7]$ . **6P**

Begründe für jede der folgenden Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist.



- (1) Die Tangente an das Schaubild von  $f$  an der Stelle  $x = -2$  hat die Steigung  $-1$ .
- (2) Das Schaubild jeder Stammfunktion von  $f$  hat an der Stelle  $x = 0$  eine waagrechte Tangente.
- (3) Jede Stammfunktion von  $f$  hat fünf Wendestellen.
- (4)  $\int_0^4 f'(x) dx = 0$

### Aufgabe A5

1. Die Funktion  $f$  hat die Gleichung  $f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{13}{4}x$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .  
Das Schaubild von  $f$  ist  $K$ .

- 1.1 Zeige, dass  $K$  keine Extrempunkte besitzt. Untersuche das Krümmungsverhalten von  $K$ . Zeichne  $K$ . **5P**
- 1.2 Entscheide und begründe, welche der folgenden Abbildungen das Schaubild  $K$  zeigt. **2P**

Abbildung 1

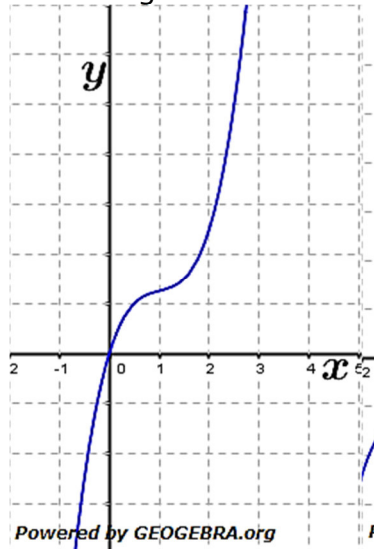


Abbildung 2

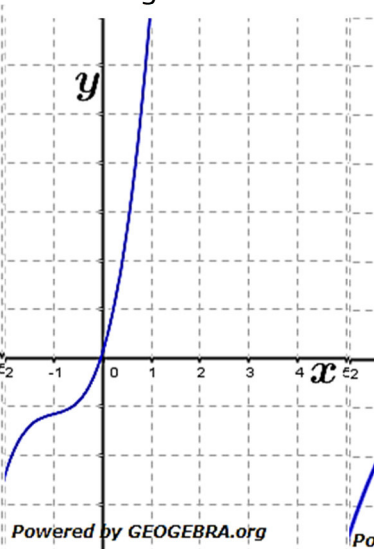
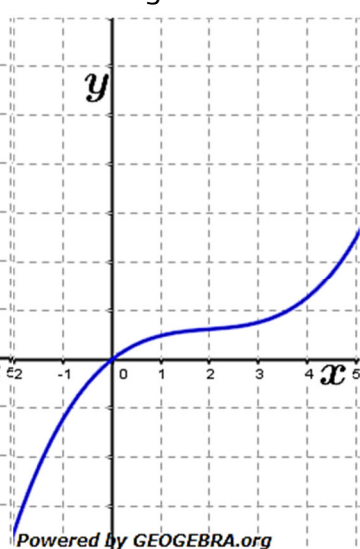


Abbildung 3



**Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben**

- 1.3 Die Tangente an  $K$  im Ursprung begrenzt mit  $K$  eine Fläche. **7P**  
Zeichne diese Tangente in die entsprechende Abbildung aus 1.2 ein.  
Ermittle den Inhalt der Fläche mithilfe einer Stammfunktion.
- 1.4 Zeige, dass die erste Winkelhalbierende eine Tangente an das Schaubild darstellt. **3P**
- 1.5 Gegeben ist die Funktion  $g$  mit  $g(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b$ ;  $x \in \mathbb{R}$ . **3P**  
Bestimme  $a$  und  $b$  so, dass die Tangente an das Schaubild von  $g$  in  $P(2|2)$  parallel zur Geraden mit der Steigung  $y = -x$  verläuft.

**Aufgabe A6**

1. Die Funktion  $f$  ist gegeben durch  $f(x) = 2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .  
Das Schaubild von  $f$  ist  $K$ .
- 1.1 Beschreibe, wie  $K$  aus dem Schaubild mit der Gleichung  $y = \sin(x)$  hervorgeht. **8P**  
Gib die Periode und die Wertemenge von  $f$  an.  
Zeichne  $K$  für  $-3 \leq x \leq 5$ .
- 1.2 Bestimme den Schnittwinkel der Tangente an  $K$  in zwei benachbarten Wendepunkten von  $K$ . **3P**
- 1.3 Zwischen zwei benachbarten Tiefpunkten von  $K$  schließen  $K$  und die  $x$ -Achse eine Fläche ein. **6P**  
Ermittle die Stammfunktion  $F$  von  $f$ , deren Schaubild durch den Punkt  $P(-1|0)$  verläuft. Dem Funktionswert  $F(3)$  entspricht der Inhalt einer Fläche in deiner Zeichnung aus 1.1. Schraffiere diese Fläche.  
Berechne den Inhalt dieser Fläche.
- 1.4 Das Schaubild der Funktion  $g$  mit  $g(x) = 2e^{2x}$  und die Gerade mit der Gleichung  $y = x + 2$  begrenzen ein Flächenstück. Dieses rotiert um die  $x$ -Achse. **3P**  
Notiere einen Ansatz zur Berechnung des dadurch erzeugten Rotationskörpers.

**Abituraufgaben Analysis BG** (Teil 2 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**  
**Aufgabe A7**

- 1.1 Gegeben ist die Funktion  $s$  mit  $s(x) = \frac{1}{2}x + 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .  
Das Schaubild von  $s$  ist  $C$ .

- 1.1.1 Zeichne  $C$  für  $-2 \leq x \leq 6$ . **6P**  
Untersuche, welche Werte die Steigung von  $C$  annehmen kann.

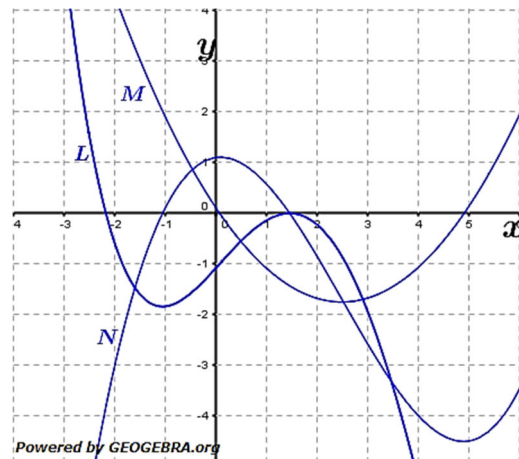
- 1.1.2 Weise nach, dass die Gerade  $g$  mit der Gleichung  $y = 0,5x - 1$  **3P**  
das Schaubild  $C$  an den Stellen  $x_1 = -2$  und  $x_2 = 6$  berührt.

- 1.1.3  $C$  und  $g$  begrenzen für  $-2 \leq x \leq 6$  eine Fläche. **3P**  
Berechne deren Inhalt.

- 1.2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt der Schaubilder einer Funktion  $h$ ,  
ihrer Ableitungsfunktion  $h'$  und einer Stammfunktion  $H$  von  $h$ .

- 1.2.1 Ordne die Schaubilder den **3P**  
Funktionen  $h$ ,  $h'$  und  $H$  zu und  
begründe deine Entscheidung.

- 1.2.2 Das Schaubild  $N$  und die  $x$ -Achse **2P**  
begrenzen eine Fläche, die ober-  
halb der  $x$ -Achse liegt.  
Bestimme näherungsweise  
deren Inhalt.



- 1.3  $G$  ist das Schaubild von  $f$  mit  $f(x) = 1 - e^{-x}$ ;  $x \in \mathbb{R}$ . **3P**  
 $\bar{G}$  entsteht durch Spiegelung von  $G$  an der  $y$ -Achse. Zeige, dass sich  
 $G$  und  $\bar{G}$  senkrecht schneiden.

## Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

### Lösung A1

- 1.1 Nur Abbildung **C** ist das Schaubild der Funktion  $f$  mit  $f(x) = -2x^2(x - 3)$ .  
 $f$  hat in  $x_0 = 0$  eine doppelte Nullstelle und in  $x_1 = 3$  eine einfache Nullstelle.  
 Dies trifft nur für Schaubild **C** zu.  
 Schaubild **A** hat in  $x_0 = 0$  eine einfache und in  $x_1 = 3$  eine doppelte Nullstelle.  
 Schaubild **B** hat in  $x_0 = 0$  eine doppelte und in  $x_1 = -3$  eine einfache Nullstelle.  
 Die korrekte Skalierung der  $y$ -Achse ist in untenstehender Grafik eingetragen.

**C**

$$1.2 \quad A = \int_0^3 (-2x^2(x - 3)) dx = \int_0^3 (-2x^3 + 6x^2) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{2} x^4 + 2x^3 \right]_0^3 = -\frac{81}{2} + 54 - 0$$

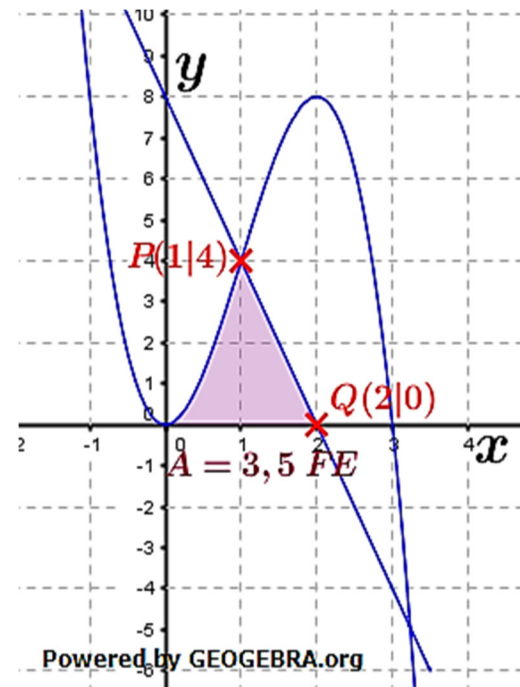
$$= 13,5 \text{ FE}$$

$$1.3 \quad A = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 (-4x + 8) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{2} x^4 + 2x^3 \right]_0^1 + [-2x^2 + 8x]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2} + 2 - 8 + 16 - (-2 + 8)$$

$$= 3,5 \text{ FE}$$



1.4

1.4.1  $g''(3) < 0$ :

Die Aussage ist falsch,  $g$  hat in  $x_0 = 3$  einen Tiefpunkt, somit ist  $g''(3) > 0$ .

1.4.2 Vorzeichenwechsel von  $g'$  bei  $x = 1$  von  $+$  nach  $-$ :

Die Aussage ist richtig,  $g$  hat in  $x = 1$  einen Hochpunkt.

1.4.3  $g'$  hat in  $x = 2$  einen Hochpunkt:

Die Aussage ist falsch.  $g$  hat in  $x = 2$  eine Wendestelle mit negativer Steigung, somit hat  $g'$  dort einen Tiefpunkt.

1.4.4 Momentane und durchschnittliche Änderungsrate:

Die Aussage ist richtig. Die momentane Änderungsrate in  $x = 3$  ist Null, die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall  $[1; 2]$  ist negativ.

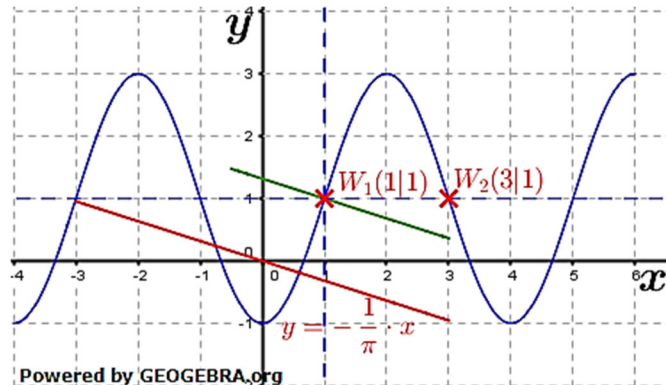
**Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben**

**Lösung A2**

1.1.1  $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 1; x \in \mathbb{R}$

Das Schaubild  $K$  entsteht aus der Sinuskurve mit  $y = \sin(x)$  durch

- Streckung in  $y$ -Richtung mit dem Faktor  $k = 2$ ,
- Streckung in  $x$ -Richtung mit dem Faktor  $k = \frac{2}{\pi}$ ,
- Verschiebung in  $x$ -Richtung um eine Einheit nach rechts und
- Verschiebung in  $y$ -Richtung um eine Einheit nach oben.



1.1.2 Benachbarte Wendepunkte.

Wegen Verschiebung in  $x$ -Richtung um eine Einheit nach rechts und in  $y$ -Richtung um eine Einheit nach oben befindet sich ein Wendepunkt in  $W_1(1|1)$ . Ein benachbarter Wendepunkt befindet sich entweder  $\frac{p}{2}$  weiter links bzw.  $\frac{p}{2}$  weiter rechts.

$$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$W_2(3|1)$  alternativ  $W_3(-1|1)$ .

Für die Gleichung der Ursprungsgeraden parallel zur Normalen an  $K$  in einem Wendepunkt wählen wir den Wendepunkt  $W_1(1|1)$

$$y = -\frac{1}{f'(1)}x$$

$$f'(x) = \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$$

$$f'(1) = \pi \cos(0) = \pi$$

$$y = -\frac{1}{\pi} \cdot x$$

- Die Aussage ist richtig. Da  $g$  die waagrechte Asymptote  $y = 1$  besitzt, hat jede Stammfunktion  $G$  von  $g$  ein Funktionsglied  $x + C$ , welches dann zur schiefen Asymptote  $y = x + C$  wird wegen  $e^{-x} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$ .
- Die Aussage ist falsch,  $g$  hat an der Stelle  $x = -1$  einen Extrempunkt, somit hat  $G$  bei  $x = -1$  eine Wendestelle.

1.2.2 Gemäß Schaubild ist  $f(0) = 3$ . Die waagrechte Asymptote ist  $y = 1$

Hieraus folgt:

$$b = 1$$

$$a \cdot e^0 + 1 = 3$$

$$a = 2$$

Die Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{-x} + 1$$

## Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

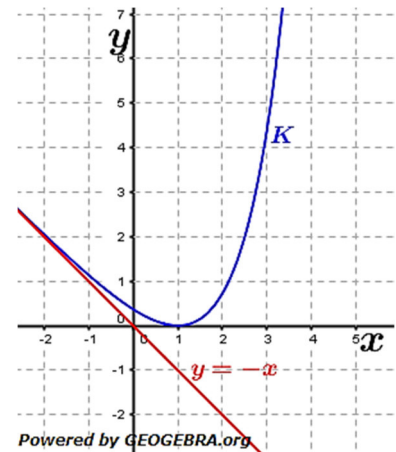
### Lösung A3

#### 1.1 Asymptote:

Wegen  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0$  ist

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -x$$

Die Gleichung der Asymptote lautet  $y = -x$ .



#### 1.2 Extrempunkte:

$$f'(x) = e^{x-1} - 1$$

$$f''(x) = e^{x-1}$$

$$e^{x-1} - 1 = 0$$

$$e^{x-1} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$f''(1) = e^0 = 1 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$f(1) = 0$$

$$TP(1|0)$$

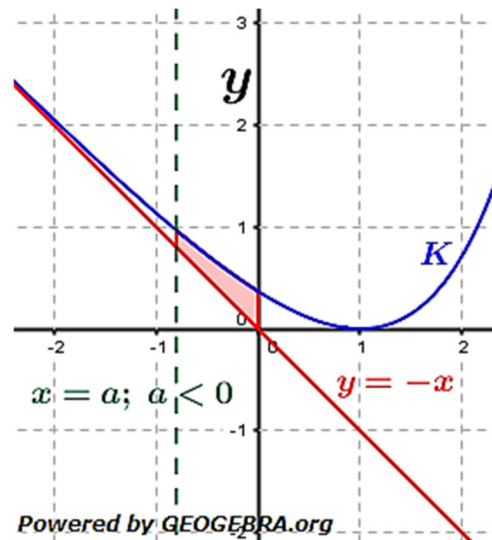
#### 1.3 Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation.

$$\int_a^0 e^{x-1} - x - (-x) dx = \int_a^0 e^{x-1} dx$$

$$\int_a^0 e^{x-1} dx = [e^{x-1}]_a^0 = e^{-1} - e^{a-1}$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} e^{a-1} = 0$$

$$A = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{x-1} dx = e^{-1} = \frac{1}{e}$$



#### 1.4 $p(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Bedingungen aus Text:

$$p(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$p'(1) = -4$$

$$p'(\sqrt{2}) = 0$$

$$p(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$(1) \quad 4a + 2b = -4$$

$$(2) \quad 8\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b = 0$$

$$(1) \quad 2b = -4(x+1) \rightarrow (2)$$

$$8\sqrt{2}a - 4\sqrt{2}(a+1) = 0 \quad | :4\sqrt{2}$$

$$2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \rightarrow (1)$$

$$(1) \quad 4 + 2b = -4 \Rightarrow b = -4$$

$$p(x) = x^4 - 4x^2 + 2$$

#### 1.5 $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$

$$p(x) = ax^3 + 6ax^2 + cx + d$$

$$p'(x) = 3ax^2 + 12ax + c$$

$$p''(x) = 6ax + 12a$$

$$6ax + 12a = 0$$

$$6ax = -12a$$

$$x = -2$$

$$| :6a$$

**q.e.d.**

## Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

### Lösung A4

1.1 Symmetrie von  $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$ :

Das Schaubild  $K$  ist achsensymmetrisch, der Funktionsterm hat nur gerade Potenzen von  $x$ . Es gilt:

$$g(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - \frac{3}{2}(-x)^2 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4} = g(x)$$

Koordinaten der Extrempunkte:

$$g'(x) = x^3 - 3x$$

$$x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$x_1 = 0; x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

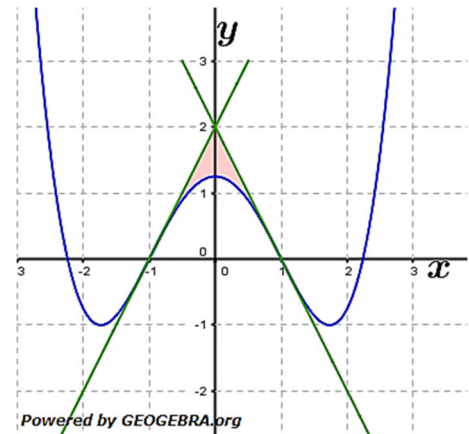
$$g(0) = \frac{5}{4}; g(-\sqrt{3}) = -1; g(\sqrt{3}) = -1$$

$$g''(x) = 3x^2 - 3$$

$$g''(0) = -3 < 0 \Rightarrow HP\left(0 \mid \frac{5}{4}\right)$$

$$g''(-\sqrt{3}) = 9 - 3 = 6 > 0 \Rightarrow TP_1(-\sqrt{3} \mid -1)$$

$$g''(\sqrt{3}) = 9 - 3 = 6 > 0 \Rightarrow TP_2(\sqrt{3} \mid -1)$$



1.2 Wendetangenten:

$$g''(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

$$g'''(x) = 6x; g'''(1) \neq 0; g'''(-1) \neq 0;$$

$$g'(1) = 1 - 3 = -2; g'(-1) = -1 + 3 = 2$$

$$g(1) = 0; g(-1) = 0$$

$$WP_1(-1 \mid 0); WP_2 = (1 \mid 0)$$

$$t_1(x) = g'(1) \cdot (x - 1) + g(1) = -2(x - 1) + 0 = -2x + 2$$

$$t_2(x) = g'(-1) \cdot (x + 1) + g(-1) = 2(x + 1) + 0 = 2x + 2$$

Eingeschlossene Fläche:

$$t_1(x) = 0 = -2x + 2 \Rightarrow x = 1$$

$$A_1 = \int_0^1 t_1(x) - g(x) dx = \int_0^1 \left( -2x + 2 - \left( \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4} \right) \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left( -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{4} \right) dx = \left[ -\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{3}{4}x \right]_0^1 = -\frac{1}{20} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4}$$

$$A_1 = \frac{1}{5}$$

Da  $K$  achsensymmetrisch ist, ist die Gesamtfläche, die von den beiden Wendetangenten und dem Graphen  $K$  eingeschlossen wird gleich  $2 \cdot A_1 = \frac{2}{5}$ .

1.3  $w$  ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt  $S(0 \mid 4)$  und verläuft somit oberhalb von  $K$ . Das Rotationsvolumen bestimmt sich somit

aus:  $V = \pi \cdot \int_{-1}^1 (w(x)^2 - g(x)^2) dx$

## Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

- 1.4 (1) Die Aussage ist falsch, die Tangente in  $x = -1$  hat die Steigung von etwa  $-0,5$ .
- (2) Die Aussage ist falsch, das Schaubild jeder Stammfunktion von  $f$  hat an der Stelle  $x = 0$  eine Wendestelle mit der Steigung 1, da  $f$  in  $x = 0$  eine Extremstelle hat.
- (3) Die Aussage ist richtig, da  $f$  in  $\mathbb{D}$  fünf Extremstellen besitzt.
- (4) Die Aussage ist richtig, denn:

$$\int_0^4 f'(x) dx = 0 = [f(x)]_0^4 = f(4) - f(0) = 1 - 1 = 0$$

### Lösung A5

- 1.1 Extrempunkte mit  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + \frac{13}{4}$$

$$3x^2 - 6x + \frac{13}{4} = 0 \quad | \quad :3$$

$$x^2 - 2x + \frac{13}{12} = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{13}{12}} \quad | \quad p/q\text{-Formel}$$

$$\mathbb{L} = \{ \}$$

Krümmungsverhalten über  $f'''(x) =$  im Wendepunkt.

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f'''(1) > 0$$

$K$  wechselt in  $x = 1$  von rechtsgekrümmt auf linksgekrümmt.

Rechtskrümmung im Intervall  $I = ]-\infty; 1]$ , Linkskrümmung im Intervall  $I = ]1; \infty[$ .

$$f(1) = 1 - 3 + \frac{13}{4} = \frac{5}{4}$$

- 1.2 Abbildung 1 ist das Schaubild von  $f$ .

Aus 1.1 ergibt sich der Wendepunkt mit  $WP\left(1 \mid \frac{5}{4}\right)$ . Nur Abbildung 1 hat einen solchen Wendepunkt.

- 1.3 Tangente im Ursprung:

$$t(x) = f'(0) \cdot x$$

$$f'(0) = \frac{13}{4}$$

$$t(x) = \frac{13}{4} \cdot x$$

Inhalt der Fläche:

$$f(x) \cap t(x)$$

$$x^3 - 3x^2 + \frac{13}{4}x = \frac{13}{4}x$$

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 3$$

$$A = \int_0^3 t(x) - f(x) dx = \int_0^3 -x^3 + 3x^2 dx = \left[ -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_0^3 = -\frac{81}{4} + 27 = \frac{27}{4}$$

Die eingeschlossene Fläche hat  $\frac{27}{4}$  FE.

## Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

1.4 Erste Winkelhalbierende  $y = x$ .

$$f'(x) = 1$$

$$3x^2 - 6x + \frac{13}{4} = 1$$

$$3x^2 - 6x + \frac{9}{4} = 0$$

$$| \quad :3$$

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 1 \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}; \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$t_1(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}; \quad t_2(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) + 1$$

$$t_1(x) = x$$

**q.e.d.**

1.5 Bedingungen:

$$g(2) = 2$$

$$g'(2) = -1$$

$$(1) \quad a \sin(\pi) + b = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$(2) \quad \frac{a \cdot \pi}{2} \cos(\pi) + 2 = -1$$

$$-\frac{a \cdot \pi}{2} = -3$$

$$a = \frac{6}{\pi}$$

$$g(x) = \frac{6}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$$

### Lösung A6

1.1  $f(x) = 2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Das Schaubild von  $f$  geht aus dem Schaubild von  $y = \sin(x)$  hervor durch:

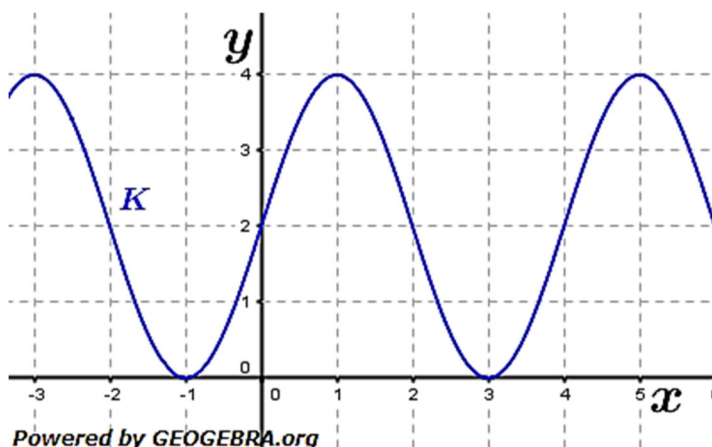
(1) Streckung in  $y$ -Richtung mit dem Faktor  $k = 2$ ;

(2) Streckung in  $x$ -Richtung mit dem Faktor  $k = \frac{2}{\pi}$ ;

(3) Verschiebung in  $y$ -Richtung um zwei Stellen nach oben.

$$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\mathbb{W}_f = \{0; 4\}$$



**Abituraufgaben Analysis BG** (Teil 2 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**

1.2 Bestimmung von zwei benachbarten Wendepunkten:

Einfache Lösung:

Wendepunkte einer in  $x$ -Richtung unverschobenen Sinuskurve liegen bei  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{p}{2}$  und  $x_3 = p$ . Zwei benachbarte Wendepunkte sind somit

$$WP_1(0|2); \quad WP_2(2|2)$$

Umständliche Lösung

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$-\frac{\pi^2}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{p}{2} - x_1 = 2$$

$$f(0) = 2 + 2 \sin(0) = 2$$

$$f(2) = 2 + 2 \sin(\pi) = 2$$

$$WP_1(0|2); \quad WP_2(2|2)$$

$$f'(x) = \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$f'(0) = \pi \cos(0) = \pi$$

$$f'(2) = \pi \cos(\pi) = -\pi$$

Bestimmung des Schnittwinkels:

Schnittwinkel mit der  $x$ -Achse:

$$\tan(\alpha) = \pi$$

$$\alpha = \arctan(\pi) = 72,34^\circ$$

Aus Symmetriegründen ist der Schnittwinkel für  $-\pi$  mit der  $x$ -Achse ebenfalls  $72,34^\circ$ , sodass für den Schnittwinkel der Tangenten gilt:

$$\gamma = 180^\circ - 2 \cdot \alpha = 180^\circ - 2 \cdot 72,34^\circ = 35,32^\circ$$

1.3 Bestimmung von zwei benachbarter Tiefpunkten:

$$TP_1(-1|0); \quad TP_2(3|0)$$

$$F(x) = 2x - \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C$$

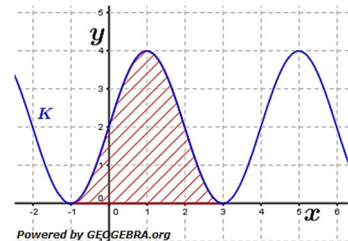
$$0 = -2 - \frac{4}{\pi} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C \quad | \quad \text{Punktprobe } P(-1|0)$$

$$-2 + C = 0 \Rightarrow C = 2$$

$$F(x) = 2x - \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$$

$$F(3) = 6 - \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2 = 8$$

$$A = \int_{-1}^3 2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[2x - \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^3 = 6 - 0 - (-2 - 0) = 8$$



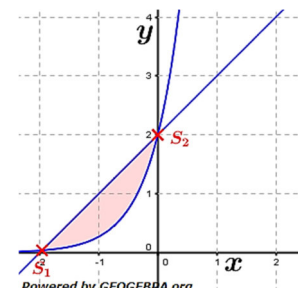
1.4 Situation siehe Skizze.

Berechnung der beiden Schnittpunkte über  $g \cap x + 2$ .

Erhalte  $x_1$  und  $x_2$ .

Volumenberechnung über

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} ((x+2)^2 - g(x)^2) dx.$$



## Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

### Lösung A7

1.1 Mögliche Werte der Steigung von  $s$ :

$$s'(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

Wegen  $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \leq 1$  ist

$$\mathbb{W}_{s'} = \{-2,05; 3,05\}.$$

1.1.1  $s'(x) = 0,5$

$$\frac{1}{2} + \frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4}x_1 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = -2$$

$$\frac{\pi}{4}x_2 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x_2 = 6$$

$$s(-2) = -1 + 1 + 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$$

$$s(6) = 3 + 1 + 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 4 - 2 = 2$$

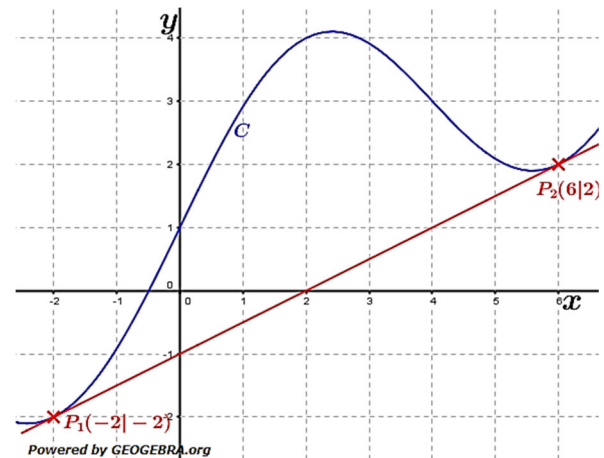
$$P_1(-2|-2); P_2(6|2)$$

Prüfung gegen  $y = 0,5x - 1$ :

$$-2 = 0,5 \cdot -2 - 1 = -2$$

$$2 = 0,5 \cdot 6 - 1 = 2$$

Die Punkte  $P_1(-2|-2)$  sowie  $P_2(6|2)$  sind Berührungspunkte von  $C$  und  $y = 0,5x - 1$ .



$$1.1.2 \quad A = \int_{-2}^6 \left( \frac{1}{2}x + 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 0,5x + 1 \right) dx = \int_{-2}^6 \left( 2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \right) dx$$

$$= \left[ 2x - \frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \right]_{-2}^6 = 12 - 0 - (-4 - 0) = 16$$

Die Fläche ist 16 FE groß.

1.2.1 Alle drei Schaubilder sind Schaubilder ganzrationaler Funktionen. Das Schaubild  $M$  ist der Schaubild einer ganzrationalen Funktion 2. Grades (Parabel) als Funktion kleinsten Grades. Somit ist  $M$  das Schaubild der Funktion  $h'$ .

Wegen den beiden Nullstellen mit VZW von  $M$  bei  $x_1 \approx 0,1$  und  $x_2 \approx 4,9$  ist  $N$  das Schaubild der Funktion  $h$ , weil  $N$  bei  $x_1 \approx 0,1$  einen Hochpunkt und bei  $x_1 \approx 4,9$  einen Tiefpunkt hat.

Somit ist  $L$  das Schaubild der Funktion  $H$  weil  $L$  bei  $x_1 \approx 0,1$  und bei  $x_1 \approx 4,9$  jeweils einen Wendepunkt hat.

1.2.2 Durch Abzählen von Kästchen unter  $N$  im Intervall  $I = [-1; 1,5]$  erhält man in etwa 1,8 FE.

1.3  $\overline{G}$ :

$$g(x) = f(-x) = 1 - e^x$$

$$f'(x) = e^{-x}; \quad g'(x) = -e^x$$

$$f(x) \cap g(x)$$

$$1 - e^{-x} = 1 - e^x$$

$$e^x = e^{-x} \Rightarrow x = 0$$

$$f'(0) = e^{-0} = 1; \quad g'(0) = -e^0 = -1$$

Wegen  $f'(0) \cdot g'(0) = -1$  schneiden sich  $G$  und  $\overline{G}$  in  $S(0|0)$  senkrecht.