

Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Lösung A1

- 1.1 Nur Abbildung **C** ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -2x^2(x - 3)$.
 f hat in $x_0 = 0$ eine doppelte Nullstelle und in $x_1 = 3$ eine einfache Nullstelle.
 Dies trifft nur für Schaubild **C** zu.
 Schaubild **A** hat in $x_0 = 0$ eine einfache und in $x_1 = 3$ eine doppelte Nullstelle.
 Schaubild **B** hat in $x_0 = 0$ eine doppelte und in $x_1 = -3$ eine einfache Nullstelle.
 Die korrekte Skalierung der y -Achse ist in untenstehender Grafik eingetragen.

C

$$1.2 \quad A = \int_0^3 (-2x^2(x - 3)) dx = \int_0^3 (-2x^3 + 6x^2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} x^4 + 2x^3 \right]_0^3 = -\frac{81}{2} + 54 - 0$$

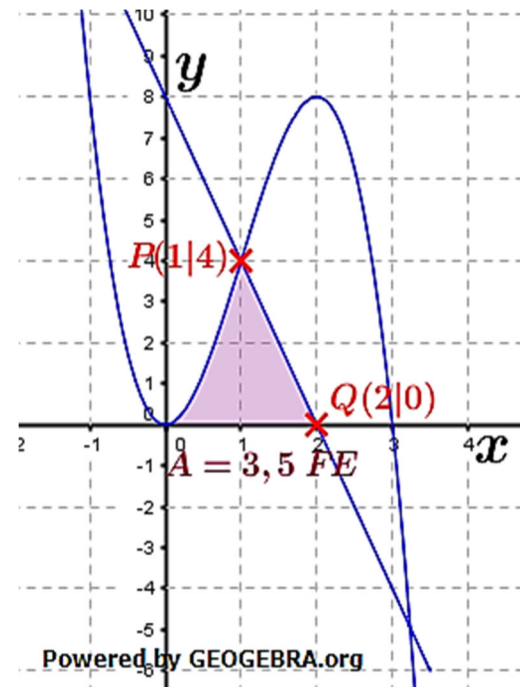
$$= 13,5 \text{ FE}$$

$$1.3 \quad A = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 (-4x + 8) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} x^4 + 2x^3 \right]_0^1 + [-2x^2 + 8x]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2} + 2 - 8 + 16 - (-2 + 8)$$

$$= 3,5 \text{ FE}$$



- 1.4
- 1.4.1 $g''(3) < 0$:
 Die Aussage ist falsch, g hat in $x_0 = 3$ einen Tiefpunkt, somit ist $g''(3) > 0$.
- 1.4.2 Vorzeichenwechsel von g' bei $x = 1$ von $+$ nach $-$:
 Die Aussage ist richtig, g hat in $x = 1$ einen Hochpunkt.
- 1.4.3 g' hat in $x = 2$ einen Hochpunkt:
 Die Aussage ist falsch. g hat in $x = 2$ eine Wendestelle mit negativer Steigung, somit hat g' dort einen Tiefpunkt.
- 1.4.4 Momentane und durchschnittliche Änderungsrate:
 Die Aussage ist richtig. Die momentane Änderungsrate in $x = 3$ ist Null, die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall $[1; 2]$ ist negativ.

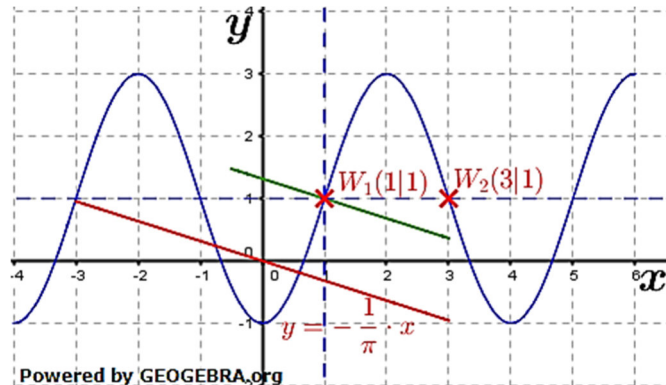
Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Lösung A2

1.1.1 $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 1; x \in \mathbb{R}$

Das Schaubild K entsteht aus der Sinuskurve mit $y = \sin(x)$ durch

- Streckung in y -Richtung mit dem Faktor $k = 2$,
- Streckung in x -Richtung mit dem Faktor $k = \frac{2}{\pi}$,
- Verschiebung in x -Richtung um eine Einheit nach rechts und
- Verschiebung in y -Richtung um eine Einheit nach oben.



1.1.2 Benachbarte Wendepunkte.

Wegen Verschiebung in x -Richtung um eine Einheit nach rechts und in y -Richtung um eine Einheit nach oben befindet sich ein Wendepunkt in $W_1(1|1)$. Ein benachbarter Wendepunkt befindet sich entweder $\frac{p}{2}$ weiter links bzw. $\frac{p}{2}$ weiter rechts.

$$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$W_2(3|1)$ alternativ $W_3(-1|1)$.

Für die Gleichung der Ursprungsgeraden parallel zur Normalen an K in einem Wendepunkt wählen wir den Wendepunkt $W_1(1|1)$

$$y = -\frac{1}{f'(1)}x$$

$$f'(x) = \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$$

$$f'(1) = \pi \cos(0) = \pi$$

$$y = -\frac{1}{\pi} \cdot x$$

- 1.2.1
- Die Aussage ist richtig. Da g die waagrechte Asymptote $y = 1$ besitzt, hat jede Stammfunktion G von g ein Funktionsglied $x + C$, welches dann zur schiefen Asymptote $y = x + C$ wird wegen $e^{-x} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$.
 - Die Aussage ist falsch, g hat an der Stelle $x = -1$ einen Extrempunkt, somit hat G bei $x = -1$ eine Wendestelle.

1.2.2 Gemäß Schaubild ist $f(0) = 3$. Die waagrechte Asymptote ist $y = 1$

Hieraus folgt:

$$b = 1$$

$$a \cdot e^0 + 1 = 3$$

$$a = 2$$

Die Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{-x} + 1$$

Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

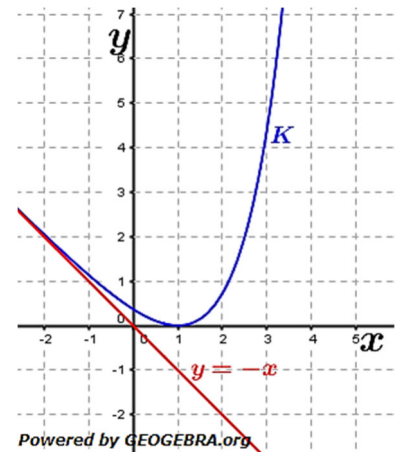
Lösung A3

1.1 Asymptote:

Wegen $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0$ ist

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -x$$

Die Gleichung der Asymptote lautet $y = -x$.



1.2 Extrempunkte:

$$f'(x) = e^{x-1} - 1$$

$$f''(x) = e^{x-1}$$

$$e^{x-1} - 1 = 0$$

$$e^{x-1} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$f''(1) = e^0 = 1 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$f(1) = 0$$

$$TP(1|0)$$

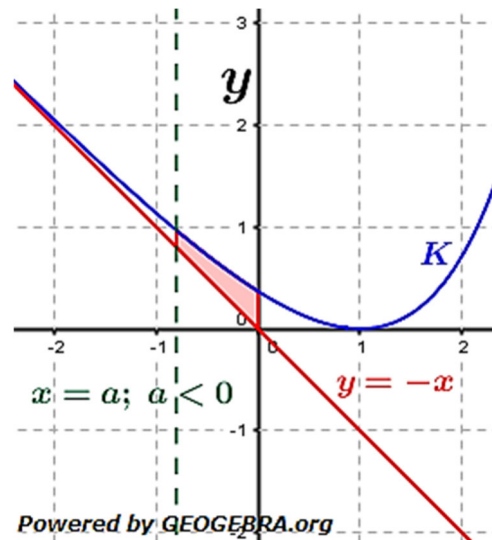
1.3 Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation.

$$\int_a^0 e^{x-1} - x - (-x) dx = \int_a^0 e^{x-1} dx$$

$$\int_a^0 e^{x-1} dx = [e^{x-1}]_a^0 = e^{-1} - e^{a-1}$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} e^{a-1} = 0$$

$$A = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{x-1} dx = e^{-1} = \frac{1}{e}$$



1.4 $p(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Bedingungen aus Text:

$$p(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$p'(1) = -4$$

$$p'(\sqrt{2}) = 0$$

$$p(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$(1) \quad 4a + 2b = -4$$

$$(2) \quad 8\sqrt{2}a + 2\sqrt{2}b = 0$$

$$(1) \quad 2b = -4(x+1) \rightarrow (2)$$

$$8\sqrt{2}a - 4\sqrt{2}(a+1) = 0 \quad | :4\sqrt{2}$$

$$2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \rightarrow (1)$$

$$(1) \quad 4 + 2b = -4 \Rightarrow b = -4$$

$$p(x) = x^4 - 4x^2 + 2$$

1.5 $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$

$$p(x) = ax^3 + 6ax^2 + cx + d$$

$$p'(x) = 3ax^2 + 12ax + c$$

$$p''(x) = 6ax + 12a$$

$$6ax + 12a = 0$$

$$6ax = -12a$$

$$x = -2$$

| :6a
q.e.d.

Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Lösung A4

1.1 Symmetrie von $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$:

Das Schaubild K ist achsensymmetrisch, der Funktionsterm hat nur gerade Potenzen von x . Es gilt:

$$g(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - \frac{3}{2}(-x)^2 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4} = g(x)$$

Koordinaten der Extrempunkte:

$$g'(x) = x^3 - 3x$$

$$x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$x_1 = 0; x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

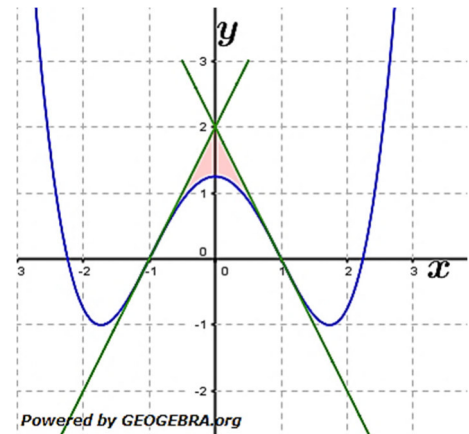
$$g(0) = \frac{5}{4}; \quad g(-\sqrt{3}) = -1; \quad g(\sqrt{3}) = 1$$

$$g''(x) = 3x^2 - 3$$

$$g''(0) = -3 < 0 \Rightarrow HP\left(0 \mid \frac{5}{4}\right)$$

$$g''(-\sqrt{3}) = 9 - 3 = 6 > 0 \Rightarrow TP_1(-\sqrt{3} \mid -1)$$

$$g''(\sqrt{3}) = 9 - 3 = 6 > 0 \Rightarrow TP_2(\sqrt{3} \mid -1)$$



1.2 Wendetangenten:

$$g''(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

$$g'''(x) = 6x; \quad g'''(1) \neq 0; \quad g'''(-1) \neq 0;$$

$$g'(1) = 1 - 3 = -2; \quad g'(-1) = -1 + 3 = 2$$

$$g(1) = 0; \quad g(-1) = 0$$

$$WP_1(-1 \mid 0); \quad WP_2 = (1 \mid 0)$$

$$t_1(x) = g'(1) \cdot (x - 1) + g(1) = -2(x - 1) + 0 = -2x + 2$$

$$t_2(x) = g'(-1) \cdot (x + 1) + g(-1) = 2(x + 1) + 0 = 2x + 2$$

Eingeschlossene Fläche:

$$t_1(x) = 0 = -2x + 2 \Rightarrow x = 1$$

$$A_1 = \int_0^1 t_1(x) - g(x) \, dx = \int_0^1 \left(-2x + 2 - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4} \right) \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{4} \right) dx = \left[-\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{3}{4}x \right]_0^1 = -\frac{1}{20} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4}$$

$$A_1 = \frac{1}{5}$$

Da K achsensymmetrisch ist, ist die Gesamtfläche, die von den beiden Wendetangenten und dem Graphen K eingeschlossen wird gleich $2 \cdot A_1 = \frac{2}{5}$.

1.3 w ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(0 \mid 4)$ und verläuft somit oberhalb von K . Das Rotationsvolumen bestimmt sich somit aus: $V = \pi \cdot \int_{-1}^1 (w(x)^2 - g(x)^2) dx$

Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

- 1.4 (1) Die Aussage ist falsch, die Tangente in $x = -1$ hat die Steigung von etwa $-0,5$.
- (2) Die Aussage ist falsch, das Schaubild jeder Stammfunktion von f hat an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle mit der Steigung 1, da f in $x = 0$ eine Extremstelle hat.
- (3) Die Aussage ist richtig, da f in $\mathbb{D}$ fünf Extremstellen besitzt.
- (4) Die Aussage ist richtig, denn:

$$\int_0^4 f'(x) dx = 0 = [f(x)]_0^4 = f(4) - f(0) = 1 - 1 = 0$$

Lösung A5

- 1.1 Extrempunkte mit $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + \frac{13}{4}$$

$$3x^2 - 6x + \frac{13}{4} = 0 \quad | \quad :3$$

$$x^2 - 2x + \frac{13}{12} = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{13}{12}} \quad | \quad p/q\text{-Formel}$$

$$\mathbb{L} = \{ \}$$

Krümmungsverhalten über $f'''(x) =$ im Wendepunkt.

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f'''(1) > 0$$

K wechselt in $x = 1$ von rechtsgekrümmt auf linksgekrümmt.

Rechtskrümmung im Intervall $I =]-\infty; 1]$, Linkskrümmung im Intervall $I =]1; \infty[$.

$$f(1) = 1 - 3 + \frac{13}{4} = \frac{5}{4}$$

- 1.2 Abbildung 1 ist das Schaubild von f .

Aus 1.1 ergibt sich der Wendepunkt mit $WP\left(1 \mid \frac{5}{4}\right)$. Nur Abbildung 1 hat einen solchen Wendepunkt.

- 1.3 Tangente im Ursprung:

$$t(x) = f'(0) \cdot x$$

$$f'(0) = \frac{13}{4}$$

$$t(x) = \frac{13}{4} \cdot x$$

Inhalt der Fläche:

$$f(x) \cap t(x)$$

$$x^3 - 3x^2 + \frac{13}{4}x = \frac{13}{4}x$$

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 3$$

$$A = \int_0^3 t(x) - f(x) dx = \int_0^3 -x^3 + 3x^2 dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_0^3 = -\frac{81}{4} + 27 = \frac{27}{4}$$

Die eingeschlossene Fläche hat $\frac{27}{4}$ FE.

Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

1.4 Erste Winkelhalbierende $y = x$.

$$f'(x) = 1$$

$$3x^2 - 6x + \frac{13}{4} = 1$$

$$3x^2 - 6x + \frac{9}{4} = 0$$

$$| \quad :3$$

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 1 \pm \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}; \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$t_1(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}; \quad t_2(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) + 1$$

$$t_1(x) = x$$

q.e.d.

1.5 Bedingungen:

$$g(2) = 2$$

$$g'(2) = -1$$

$$(1) \quad a \sin(\pi) + b = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$(2) \quad \frac{a \cdot \pi}{2} \cos(\pi) + 2 = -1$$

$$-\frac{a \cdot \pi}{2} = -3$$

$$a = \frac{6}{\pi}$$

$$g(x) = \frac{6}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$$

Lösung A6

1.1 $f(x) = 2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Das Schaubild von f geht aus dem Schaubild von $y = \sin(x)$ hervor durch:

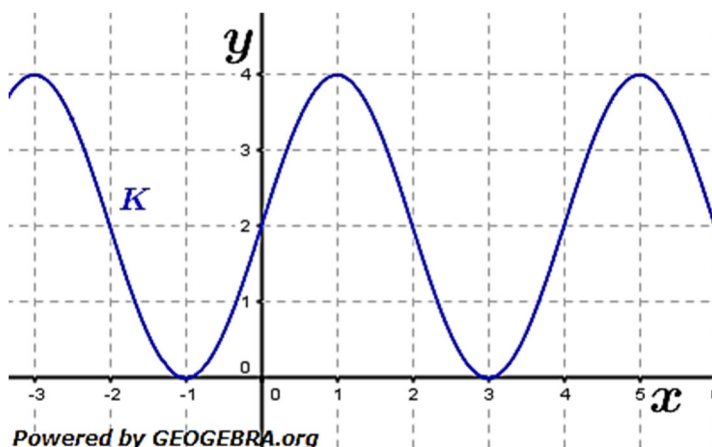
(1) Streckung in y -Richtung mit dem Faktor $k = 2$;

(2) Streckung in x -Richtung mit dem Faktor $k = \frac{2}{\pi}$;

(3) Verschiebung in y -Richtung um zwei Stellen nach oben.

$$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\mathbb{W}_f = \{0; 4\}$$



Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**

1.2 Bestimmung von zwei benachbarten Wendepunkten:

Einfache Lösung:

Wendepunkte einer in x -Richtung unverschobenen Sinuskurve liegen bei $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{p}{2}$ und $x_3 = p$. Zwei benachbarte Wendepunkte sind somit

$$WP_1(0|2); \quad WP_2(2|2)$$

Umständliche Lösung

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$-\frac{\pi^2}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{p}{2} - x_1 = 2$$

$$f(0) = 2 + 2 \sin(0) = 2$$

$$f(2) = 2 + 2 \sin(\pi) = 2$$

$$WP_1(0|2); \quad WP_2(2|2)$$

$$f'(x) = \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$f'(0) = \pi \cos(0) = \pi$$

$$f'(2) = \pi \cos(\pi) = -\pi$$

Bestimmung des Schnittwinkels:

Schnittwinkel mit der x -Achse:

$$\tan(\alpha) = \pi$$

$$\alpha = \arctan(\pi) = 72,34^\circ$$

Aus Symmetriegründen ist der Schnittwinkel für $-\pi$ mit der x -Achse ebenfalls $72,34^\circ$, sodass für den Schnittwinkel der Tangenten gilt:

$$\gamma = 180^\circ - 2 \cdot \alpha = 180^\circ - 2 \cdot 72,34^\circ = 35,32^\circ$$

1.3 Bestimmung von zwei benachbarter Tiefpunkten:

$$TP_1(-1|0); \quad TP_2(3|0)$$

$$F(x) = 2x - \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C$$

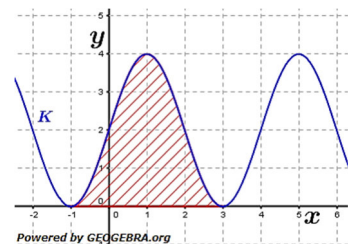
$$0 = -2 - \frac{4}{\pi} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C \quad | \quad \text{Punktprobe } P(-1|0)$$

$$-2 + C = 0 \Rightarrow C = 2$$

$$F(x) = 2x - \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$$

$$F(3) = 6 - \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2 = 8$$

$$A = \int_{-1}^3 2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[2x - \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^3 = 6 - 0 - (-2 - 0) = 8$$



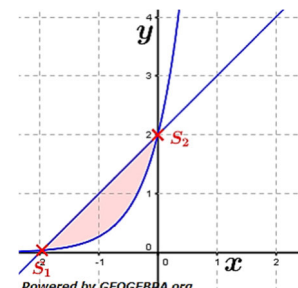
1.4 Situation siehe Skizze.

Berechnung der beiden Schnittpunkte über $g \cap x + 2$.

Erhalte x_1 und x_2 .

Volumenberechnung über

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} ((x+2)^2 - g(x)^2) dx.$$



Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Lösung A7

1.1 Mögliche Werte der Steigung von s :

$$s'(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

Wegen $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \leq 1$ ist

$$\mathbb{W}_{s'} = \{-2,05; 3,05\}.$$

1.1.1 $s'(x) = 0,5$

$$\frac{1}{2} + \frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4}x_1 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = -2$$

$$\frac{\pi}{4}x_2 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x_2 = 6$$

$$s(-2) = -1 + 1 + 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$$

$$s(6) = 3 + 1 + 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 4 - 2 = 2$$

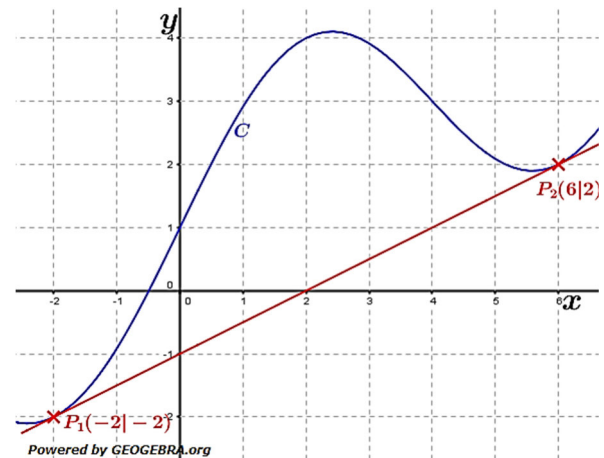
$$P_1(-2|-2); P_2(6|2)$$

Prüfung gegen $y = 0,5x - 1$:

$$-2 = 0,5 \cdot -2 - 1 = -2$$

$$2 = 0,5 \cdot 6 - 1 = 2$$

Die Punkte $P_1(-2|-2)$ sowie $P_2(6|2)$ sind Berührungspunkte von C und $y = 0,5x - 1$.



$$1.1.2 \quad A = \int_{-2}^6 \left(\frac{1}{2}x + 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 0,5x + 1 \right) dx = \int_{-2}^6 \left(2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \right) dx$$

$$= \left[2x - \frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \right]_{-2}^6 = 12 - 0 - (-4 - 0) = 16$$

Die Fläche ist 16 FE groß.

1.2.1 Alle drei Schaubilder sind Schaubilder ganzrationaler Funktionen. Das Schaubild M ist der Schaubild einer ganzrationalen Funktion 2. Grades (Parabel) als Funktion kleinsten Grades. Somit ist M das Schaubild der Funktion h' .

Wegen den beiden Nullstellen mit VZW von M bei $x_1 \approx 0,1$ und $x_2 \approx 4,9$ ist N das Schaubild der Funktion h , weil N bei $x_1 \approx 0,1$ einen Hochpunkt und bei $x_2 \approx 4,9$ einen Tiefpunkt hat.

Somit ist L das Schaubild der Funktion H weil L bei $x_1 \approx 0,1$ und bei $x_2 \approx 4,9$ jeweils einen Wendepunkt hat.

1.2.2 Durch Abzählen von Kästchen unter N im Intervall $I = [-1; 1,5]$ erhält man in etwa 1,8 FE.

1.3 $\overline{G}$:

$$g(x) = f(-x) = 1 - e^x$$

$$f'(x) = e^{-x}; \quad g'(x) = -e^x$$

$$f(x) \cap g(x)$$

$$1 - e^{-x} = 1 - e^x$$

$$e^x = e^{-x} \Rightarrow x = 0$$

$$f'(0) = e^{-0} = 1; \quad g'(0) = -e^0 = -1$$

Wegen $f'(0) \cdot g'(0) = -1$ schneiden sich G und $\overline{G}$ in $S(0|0)$ senkrecht.