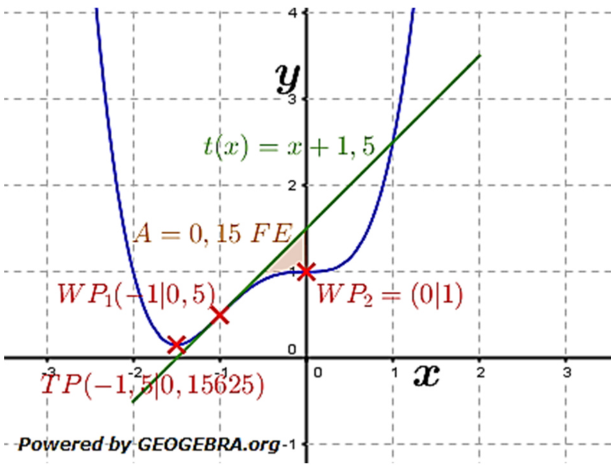
Lösung A1/2017

1.1.1 Extrempunkte mit $f'(x)=0 \wedge f''(x) \neq 0$,
Wendepunkte mit $f''(x)=0 \wedge f'''(x) \neq 0$.
$f'(x)=2x^3+3x^2;\quad f''(x)=6x^2+6x;\quad f'''(x)=12x+6$
Extrempunkte:
$2x^3+3x^2=0$
$x^2 \cdot (2x+3)=0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_{1,2}=0;\ \ x_3=-\frac{3}{2}$
$f''(0)=0;\ \ f''\left(-\frac{3}{2}\right) \overset{\text{WTR}}{=} 4{,}5;\ \ f\left(-\frac{3}{2}\right) \overset{\text{WTR}}{=} 0{,}15625$
$TP\left(-\frac{3}{2}\middle|\frac{5}{32}\right)$
Wendepunkte:
$6x^2+6x=0$
$6x(x+1)=0$ | Satz vom Nullprodukt
$x_1=0;\ \ x_2=-1$
$f'''(0)\neq 0;\ \ f'''(-1) \overset{\text{WTR}}{\neq} 0$
$f(0)=0;\ \ f(-1)=0{,}5$
$WP_1(-1|0{,}5);\ \ WP_2(0|1)$



1.1.2 Situation in rechter Grafik gekennzeichnet. Es ist eine Flächenberechnung zwischen zwei Kurven erforderlich im Intervall $[-1;0]$.
Tangentengleichung:
$t(x)=f'(-1)\cdot(x+1)+f(-1)$
$f'(-1)=-2+3=1$
$f(-1)=0{,}5$
$t(x)=1\cdot(x+1)+0{,}5=x+1{,}5$
$A=\int_{-1}^{0}(x+1{,}5-(0{,}5x^4+x^3+1))\,dx$
$=\int_{-1}^{0}(-0{,}5x^4-x^3+x+0{,}5)dx=\left[-0{,}1x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+0{,}5x\right]_{-1}^{0}$
$=\big(0-(0{,}1-0{,}25+0{,}5-0{,}5)\big)=0{,}15$
Die Fläche ist $0{,}15\ FE$ *groß.*

1.1.3 Schnittpunkte zwischen $f(x)$ und $g(x)$:
$f(x)\cap g(x)$:
$0{,}5x^4+x^3+1=0{,}5\cdot x^4+x^3+x^2+m\cdot x+2$
$x^2+mx+1=0$
$x_{1,2}=-\frac{1}{2}m\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-1}$ | p/q-Formel
Es handelt sich dann um einen Berührpunkt, wenn die Diskriminante Null ist.
$\frac{m^2}{4}-1=0;\ \longrightarrow\ m_1=2;\ \ m_2=-2$
Wegen Bedingung $m>0$ ist $m_1=2$ die Lösung.

1.2 (1) Die Aussage ist falsch. h' besitzt bei $x_0 = 1$ eeine Nullstelle mit VZW von + nach −. Somit ist $T(1|h(1))$ ein Hochpunkt.

(2) Die Aussage ist falsch. Mit $m_t \cdot m_n = -1$ als Bedingung für Orthogonalität ergibt sich aus $m_t \cdot \frac{1}{6} = -1$ $m_t = -6$. Das Schaubild von besitzt im abgebildeten Bereich an keiner Stelle den Funktionswert $h'(x_0) = -6$.

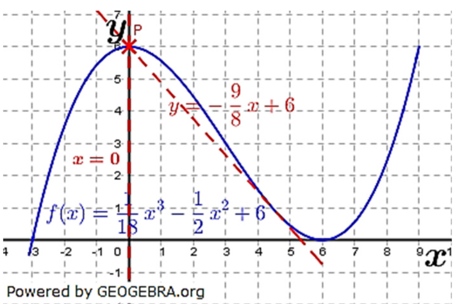
Lösung A1/2018

1.1.1 $a = \frac{1}{18}$, durch Funktionsgleichung bereits gegeben.
Das Schaubild von f hat bei $x_0 = -3$ eine einfache Nullstelle und bei $x_0 = 6$ eine doppelte Nullstelle.
Daraus folgt: $b = -3$ und $c = 6$

1.1.2 Wendepunkte mit $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$.
$f'(x) = \frac{1}{6}x^2 - x;\quad f''(x) = \frac{1}{3}x - 1;\quad f'''(x) = \frac{1}{3}$
Wendepunkte:
$\frac{1}{3}x - 1 = 0$
$x = 3$
$f'''(x) \neq 0$
$f(3) = \frac{1}{18} \cdot 3^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 + 6 = \frac{6}{2} = 3$
Der Wendepunkt hat die Koordinaten $WP(3|3)$.
Wendepunkt auf erster Winkelhalbierender:
Funktionsgleichung der ersten Winkelhalbierenden: $y = x$
$3 = 3$ | Punktprobe mit $WP(3|3)$
Der Wendepunkt liegt auf der ersten Winkelhalbierenden.

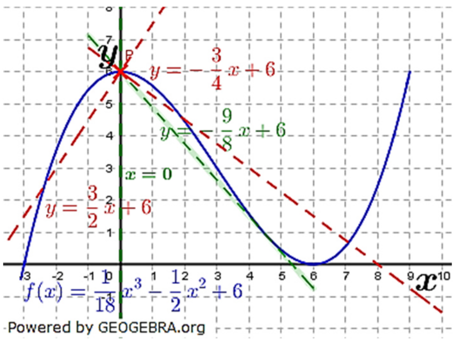
1.1.3 *Inhalt der Fläche $A_{groß}$:*
$$A_{groß} = \int_{-3}^{6} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 6x\right]_{-3}^{6} = 18 - \left(-\frac{99}{8}\right) = \frac{243}{8}$$
Inhalt der Fläche A_{klein}:
$$A_{klein} = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 6x\right]_{-3}^{0} = 0 - \left(-\frac{99}{8}\right) = \frac{99}{8}$$
$$\frac{A_{klein}}{A_{groß}} = \frac{\frac{99}{8}}{\frac{243}{8}} = \frac{99}{243} = 40{,}74\ \%$$

1.1.4 (1) genau einen Punkt
Mehrere Lösungen möglich, siehe nebenstehende Graphik.
Eine mögliche Lösung wäre z. B.
$y = -\frac{1}{6}x + 6$
(Die nebenstehend eingezeichnete Tangente $y = -\frac{9}{8}x + 6$ gehört nicht mehr zur Lösung).
Lösungsmenge:
Alle Geraden durch $(0|6)$ mit $m < -\frac{9}{8}$ haben genau einen Punkt gemeinsam.



(2) genau drei Punkte

Mehrere Lösungen möglich, siehe nebenstehende Graphik.
Eine mögliche Lösung wäre z. B.
$y = -\frac{3}{4}x + 6$, alternativ z.B. $y = \frac{3}{2}x + 6$



Die nebenstehend eingezeichnete Tangente $y = -\frac{9}{8}x + 6$ stellt offensichtlich eine Grenze dar von $x = 0$ bis kurz unter $y = -\frac{9}{8}x + 6$ liegt nur ein Schnittpunkt vor.
Für alle $m > -\frac{9}{8}$ mit Ausnahme von $m = 0$ liegen drei Schnittpunkte vor.
(Hinweis: Die Gerade $y = \frac{3}{2}x + 6$ hat im Schaubild zwar nur zwei Schnittpnkte, es gibt jedoch noch einen weiteren, dritten Schnittpunkt für $x > 10$, da die Funktion f schneller steigt als die Gerade $y = \frac{3}{2}x + 6$. Dies gilt auch für alle Geraden mit der Steiung $> -\frac{9}{8}$ ohne $m = 0$.)

m für Geraden mit nur zwei Schnittpunkten:
Aus dem Schaubild geht ohne Berechnung hervor, dass eine dieser Steigungen $m = 0$ sein muss, somit Gerade mit der Funktionsgleichung $y = 6$.
Die zweite Gerade mit nur zwei Schnittpunkten ist die Tangentengleichung an K durch den Punkt $(0|6)$.

$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

$f'(x) = \frac{1}{6}x^2 - x$

$t(x) = (\frac{1}{6}u^2 - u) \cdot (x - u) + \frac{1}{18}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + 6$

$6 = (\frac{1}{6}u^2 - u) \cdot (0 - u) + \frac{1}{18}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + 6$ | Punktprobe mit $(0|6)$

$-\frac{1}{6}u^3 + u^2 + \frac{1}{18}u^3 - \frac{1}{2}u^2 = 0$

$-\frac{1}{9}u^3 + \frac{1}{2}u^2 = 0$

$u^2 \cdot \left(-\frac{1}{9}u + \frac{1}{2}\right) = 0$

$u_1 = 0; \quad u_2 = \frac{9}{2}$

$f'(u_1) = f'(0) = m_1 = 0$

$f'(u_2) = f'\left(\frac{9}{2}\right) = m_2 = -\frac{9}{8}$

Die Geraden durch $(0|6)$ mit den Steigungen $m_1 = 0$ bzw. $m_2 = -\frac{9}{8}$ haben zwei Schnittpunkte mit K.

1.2 $g(x) = \int_1^{x^2+1} sin\,(2t)\,dt = \left[-\frac{1}{2}cos(2t)\right]_1^{x^2+1} = -\frac{1}{2}cos(2x^2 + 2) + \frac{1}{2}cos\,(2)$

$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot sin\,(2x^2 + 2) = 2x \cdot sin\,(2x^2 + 2)$

Gabis Behauptung ist falsch.

Abituraufgaben Analysis BG *(Teil 2 mit Hilfsmittel)* *2017-heute*

Lösung A1/2019

1.1.1 *Bestimmung der Werete von a und b:*

(1) $1 = a \cdot (-1)^3 + b(-1)^2$ | Punktprobe mit $P(-1|1)$

(2) $0 = a \cdot (1)^3 + b(1)^2$ | Punktprobe mit $Q(1|0)$

(1) $1 = -a + b$

(2) $\underline{0 = a + b}$

(1)+(2) $1 = 2b \;\; ==> \;\; b = \frac{1}{2}$

$b \rightarrow (1)$ $1 = -a + \frac{1}{2} \;\; ==> \;\; a = -\frac{1}{2}$

Die Funktionsgleichung lautet $p(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2$.

1.1.2 $b = -a \;==>\; b = \frac{1}{2}$

Nullstellen von $p(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2$:

$-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 = 0$ | $\cdot(-2)$

$x^3 - x^2 = 0$

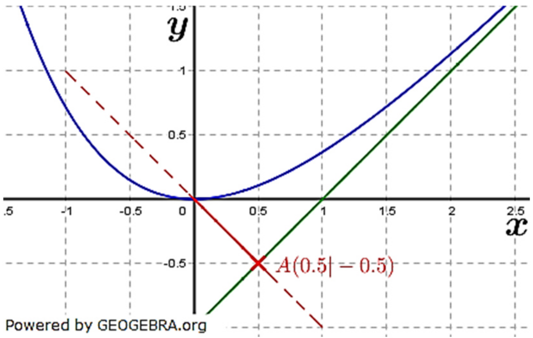
$x^2(x-1) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{1,2} = 0; \quad x_3 = 1$

p hat keine negative Nullstellen.

1.2.1 *Punkt auf g des kleinsten Abstands zu $T\big(0\big|f(0)\big)$, Größe dieses Abstgands.*

Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation. Der kürzeste Abstand ist immer der senkrechte Abstand. Hier ist dieser auf der Normalen zu g durch den Punkt $T\big(0\big|f(0)\big)$.



$f(0) = 0 - 1 + e^0 = -1 + 1 = 0$

$T(0|0)$

Orthogonalitätsbedingung von Geraden: $m_1 \cdot m_2 = -1$

Mit $m_1 = 1$ von g gilt $m_2 = -1$ für die Normale.

$n\colon\; y = -1(x-0) - 0$ | Punkt-Steigungsformel durch $T(0|0)$

$n\colon\; y = -x$

$g \cap n$:

$x - 1 = -x$

$2x = 1; \;\; ==> \;\; x = \frac{1}{2}$

$x \rightarrow n\colon\; y = -\frac{1}{2}$

Der Punkt auf g mit dem kleinsten Abstand zu $T(0|0)$ hat die Koorindaten $A(0{,}5|-0{,}5)$.

$\overline{AT} = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{0{,}5} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

Der Abstand beträgt $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\, LE$.

1.2.2 *Funktionsterm h für Verschiebung von K:*

Das Schaubild K wird um eine Stelle nach rechts und um eine Stelle nach unten verschoben.

$h(x) = (x-1) - 1 + e^{-(x-1)} - 1$

$h(x) = x - 3 + e^{1-x}$

1.2.3 (1) K besitzt keinen Wendepunkt.
Die zweite Ableitung von $f(x)$ ist $f''(x) = e^{-x}$. Diese Funktion hat keine Nullstellen.

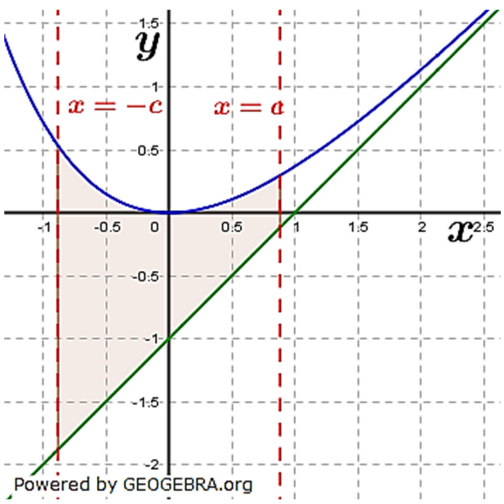
(2) Im Intervall $[1{,}841; 1{,}842]$ liegt ein x_0, sodass $f(x_0) = 1$ gilt.
$1 = x_0 - 1 + e^{-x_0}$
$2 = x_0 + e^{-x_0}$
Tabellenwerte mittels WTR:

Tabellenwerte mittel WTR

x_0	$x_0 + e^{-x_0}$
1,840	1,9988
1,841	1,9997
1,842	2,0005
1,843	2,0013

(3) Es gibt keine Normale an K, die g senkrecht schneidet.
$m_g = 1$
Sofern es eine Normale an K gäbe, die g senkrecht schneidet, müsste K über eine Parallele mit der Steigung $f'(x) = 1$ haben.
$f'(x) = 1 - e^{-x}$
$1 = 1 - e^{-x}$
$e^{-x} = 0 \implies \mathbb{L} = \{\}$

1.2.4 *Berechnung von c für Flächeninhalt $2\,FE$:*
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation. Die gesuchte Fläche ist das Integral im Intervall $I = [-c; c]$ zwischen oberer Kurve f und unterer Kurve g.



$2 = \int_{-c}^{c} \left(x - 1 + e^{-x} - (x-1)\right) dx$
$\quad = \int_{-c}^{c} e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_{-c}^{c}$
$\quad = -e^{-c} - (-e^{c})$
$2 = e^{c} - e^{-c} \qquad | \quad \cdot e^{c}$
$2e^{c} = e^{2c} - 1$
$e^{2c} - 2e^{c} - 1 = 0$
$e^{c_{1,2}} = 1 \pm \sqrt{1+1} \qquad | \quad pq$-Formel
$e^{c_1} = 1 + \sqrt{2}$
$e^{c_1} = 1 - \sqrt{2}$
$c_1 = ln\,(1 + \sqrt{2})$
c_2: $\mathbb{L} = \{\}$
Für $c = ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$ beträgt die Fläche $2\,FE$.

Lösung A1/2020

1.1.1 *$\left(1|\frac{10}{e}\right)$ ist Hochpunkt von K_f:*

Punktprobe:

$\frac{10}{e} = 10 \cdot 1 \cdot e^{-1} = \frac{10}{e}$

$f'(1) = 10 \cdot (1-1) \cdot e^{-1} = 0$

$f''(1) = 10 \cdot (1-2) \cdot e^{-1} < 0$

Der Punkt $P\left(1|\frac{10}{e}\right)$ ist Hochpunkt von K_f.

Gleichung der Asymptote von K_f:

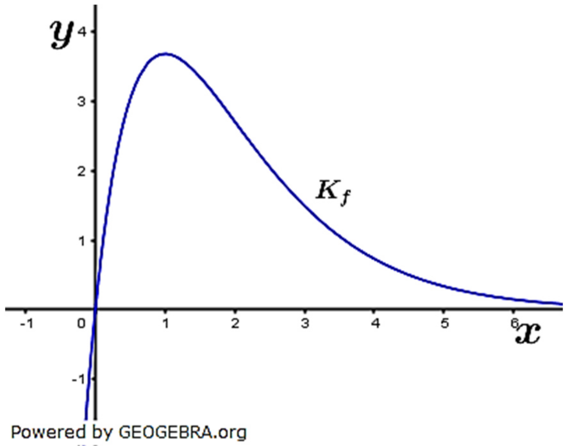
Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Gleiching der Asymptote:

$y = 0.$

1.1.2 Zeichnung von K_f:

Wertetabelle über den WTR erstellen und Graph von K_f zeichnen.



1.1.3 *$F(x) = -10 \cdot (x+1) \cdot e^{-x}$ ist Stammfunktion von f:*

$F'(x) = f(x)$

Für $F'(x)$ wird die Produkt- und Kettenregel benötigt:

$u = -10 \cdot (x+1) = -10x - 10 \qquad u' = -10$

$v = e^{-x} \qquad v' = -e^{-x}$

$F'(x) = u'v + v'u = -10 \cdot e^{-x} - 10(x+1) \cdot (-e^{-x})$

$F'(x) = -10 \cdot e^{-x} + 10(x+1) \cdot e^{-x} = 10 \cdot e^{-x}(-1 + x + 1)$

$F'(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-x} = f(x)$ ***q.e.d.***

Wert von a:

$\int_1^2 f(x)\,dx = F(2) - F(1) = -30e^{-2} + 20e^{-1} = -\frac{30}{e^2} + \frac{20}{e} = \frac{-30+20e}{e^2}$

$\frac{-30+20e}{e^2} = \frac{a \cdot e - 30}{e^2}$

$a = 20$

1.2.1 *Gerade durch P und Q:*

$P(1|h(1)) = P(1|2);\ \ Q(2|g(2)) = Q(2|1)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - *x_1} = \frac{2-1}{1-2} = -1$

$g\colon\ g(x) = -1(x-1) + 2 = -x + 3$

$g'(x) = \frac{1}{2}x;\ \ h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$g'(2) = 1;\ \ h'(1) = 1$

Die Steigung der Tangenten in $Q(2|g(2))$ als auch $P(1|h(1))$ ist jeweils $m_1 = 1$. Wegen $m_N = -\frac{1}{m_T}$ ist somit die Gerade durch P und Q Normale von K_h in P als auch die Normale von K_g in Q.

1.2.2 *Rotationsvolumen:*

Die seitliche Grafik verdeutlicht die Situation.

Wir benötigen zunächst den Schnittpunkt von $y = c$ mit $h(x) = 2\sqrt{x}$. Das Integrationsintervall ist dann von 0 bis x_c.

$2\sqrt{x} = c \quad | \quad :2$

$\sqrt{x} = \frac{c}{2} \quad | \quad ^2$

$x = \frac{c^2}{4}$

$\pi \cdot \int_0^{\frac{c^2}{4}} \left(c^2 - \left(2\sqrt{x}\right)^2\right) dx = 32\pi \quad |$ Rotationsvolumen zwischen oberer und unterer Kurve

$\int_0^{\frac{c^2}{4}} (c^2 - 4x)\, dx = [c^2 \cdot x - 2x^2]_0^{\frac{c^2}{4}} = \frac{c^4}{4} - 2 \cdot \frac{c^4}{16} - 0 = \frac{c^4}{4} - \frac{c^4}{8} = \frac{1}{8}c^4$

$\int_0^{\frac{c^2}{4}} \left(c - 2\sqrt{x}\right) dx = \frac{1}{8}c^4$

$\frac{1}{8}c^4 = 32 \quad | \quad \cdot 8$

$c^4 = 256 \quad | \quad \sqrt[4]{}$

$c = \pm 4$

Wegen Aufgabenstellung $c > 0$ ist $c = 4$ der gesuchte Wert.