

Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) 2021-heute

Diese Aufgaben sind zu bearbeiten. Sie können nicht ausgewählt werden.

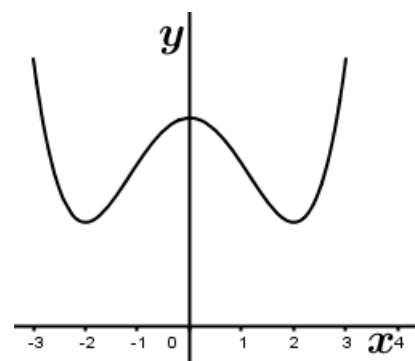


Aufgabe A1/2021

- 1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -e^{2x} + 4e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K .
- 1.1 K besitzt mit den Koordinatenachsen jeweils genau einen Schnittpunkt.
Überprüfen Sie, ob dies die Punkte $S_y(0|3)$ und $N(\ln(4)|0)$ sind. (2P)
- 1.2 Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung f' von f gilt: $f'(x) = 2e^x \cdot (2 - e^x)$.
Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art des Extremums von K . (4P)
- 1.3 Zeichnen Sie K für $-5 \leq x \leq 1,5$. (3P)
- 1.4 Prüfen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
„Der Inhalt der Fläche, die K mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten einschließt, ist das Doppelte des Mittelwertes von f auf dem Intervall $[0; \ln(4)]$.“ (3P)
- 1.5 Die Gerade mit der Gleichung $y = c$ schneidet K in zwei Punkten $P(x_P|c)$ und $Q(x_Q|c)$ mit $x_P < 0$ und $x_Q > 0$.
- 1.5.1 Geben Sie alle möglichen Werte für c an. (2P)
- 1.5.2 Es gilt nun $c = 1$.
Zeigen Sie, dass dann die y -Achse die Strecke $\overline{PQ}$ halbiert. (4P)
- 1.6 Untersuchen Sie, ob das Schaubild der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = f(x) + f(-x)$ symmetrisch ist.
Geben Sie gegebenenfalls die Art der Symmetrie an. (2P)

Aufgabe A1/2022

- 1 Gegeben sind die Punkte $T_1(-2|2)$, $T_2(2|2)$ und $H(0|4)$.
- 1.1 Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Polynomfunktion vom Grad 4, deren Schaubild K die folgenden drei Eigenschaften hat:
- K ist symmetrisch zur y -Achse
 - K schneidet die y -Achse im Punkt H
 - K hat einen Extrempunkt in T_1
- (4P)
- 1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x + 4$; $-3 \leq x \leq 3$
Das Schaubild von f ist K_f (siehe Abbildung).
- 1.2.1 Die Funktionsgleichung von f lässt sich in der Form $f(x) = a(x+b)^2(x+c)^2 + 2$ darstellen.
Geben Sie passende Werte für a, b und c an. (2P)



Powered by GEOGEBRA.org

Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) 2021-heute

- 1.2.2 Eine nach unten geöffnete Parabel, die H als Scheitelpunkt hat, schneidet K_f in einem Punkt $S(x_0|f(x_0))$ mit $x_0 > 0$. Begründen Sie, dass $x_0 < 2\sqrt{2}$ gilt. (3P)
- 1.2.3 Ermitteln Sie den größten Wert der ersten Ableitung von f für $-3 \leq x \leq 3$. (4P)
- 1.3 Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \cos(u - x) + v$; $-3 \leq x \leq 3$ hat nur die drei Extrempunkte T_1 , H und T_2 .
- 1.3.1 Bestimmen Sie die Werte von u und v . (2P)
- 1.3.2 Skizzieren Sie das Schaubild der Stammfunktion G von g mit $G(-3) = 0$.
Begründen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen wahr sind:
- (1) Jede Stammfunktion von g besitzt eine Umkehrfunktion.
 - (2) Der Definitionsbereich einer solchen Umkehrfunktion ist ein Intervall der Länge $\int_{-3}^3 g(x) dx$. (5P)

Lösung A1/2021

1.1 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

Schnittpunkt S_y mit $f(0)$:

$$f(0) = -e^{2 \cdot 0} + 4e^0 = -1 + 4 = 3 \rightarrow S_y(0|3)$$

Nullstellen mit $f(x) = 0$

$$-e^{2x} + 4e^x = 0 \quad | \cdot e^{-2x}$$

$$-1 + 4e^{-x} = 0$$

$$4e^{-x} = 1$$

$$e^{-x} = \frac{1}{4} \quad | \ln$$

$$-x = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln(4) \quad | :3$$

$$x = -\frac{1}{3} \ln(4) \rightarrow N(\ln(4)|0) \rightarrow N(\ln(4)|0)$$

1.2 Bestimmung von $f'(x)$:

$$f(x) = -e^{2x} + 4e^x$$

$$f'(x) = -2e^{2x} + 4e^x \quad | 2e^x \text{ ausklammern}$$

$$f'(x) = 2e^x(2 - e^x) \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Extrempunkte mit $f'(x) = 0$:

$$2e^x(2 - e^x) = 0$$

$$(2 - e^x) = 0 \quad | \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$e^x = 2$$

$$x = \ln(2)$$

$$f(\ln(2)) = -(e^{\ln(2)})^2 + 4 \cdot e^{\ln(2)}$$

$$f(\ln(2)) = -4 + 8 = 4 \rightarrow P(\ln(2)|4)$$

Art des Extremums mit $f''(x)$:

$$f'(x) = -2e^{2x} + 4e^x$$

$$f''(x) = -4e^{2x} + 4e^x \quad | 4e^x \text{ ausklammern}$$

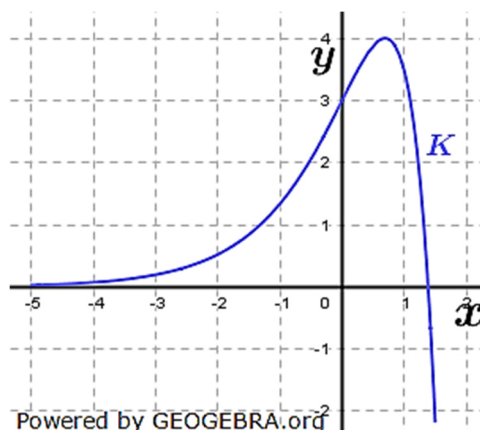
$$f''(x) = 4e^x(1 - e^x)$$

$$f''(\ln(2)) = 4 \cdot e^{\ln(2)}(1 - e^{\ln(2)}) = 8(1 - 2) = -8 < 0$$

Der Extrempunkt $P(\ln(2)|4)$ ist ein Hochpunkt.

1.3 Zeichnung des Graphen von $f(x)$:

Die Funktionsgleichung in den WTR eingeben, Wertetabelle anzeigen lassen und Punkte in KO-System übertragen.



Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) 2021-2022

- 1.4 *Inhalt der Fläche, die K mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten einschließt:*

$$A_1 = \int_0^{\ln(4)} (-e^{2x} + 4e^x) dx = \left[-\frac{1}{2}e^{2x} + 4e^x \right]_0^{\ln(4)}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{\ln(4)^2} + 4e^{\ln(4)} - \left(-\frac{1}{2} + 4 \right) = -8 + 16 - 3,5 = 4,5$$

Mittelwert von f auf $[0; \ln(4)]$:

$$\bar{m} = \frac{1}{\ln(4)} \cdot \int_0^{\ln(4)} (-e^{2x} + 4e^x) dx = \frac{1}{\ln(4)} \cdot 4,5$$

Wegen $\frac{1}{\ln(4)} \neq 2$ ist der Mittelwert nicht das Doppelte von A_1 .

- 1.5.1 *Mögliche Werte für c:*

Aus der Graphik von Aufgabenteil 1.3 ergibt sich, dass c für $x < 0$ nur Werte $0 < f(x) < 3$ annehmen kann.

Somit kann c für $x > 0$ auch nur Werte $0 < f(x) < 3$ annehmen.

- 1.5.2 *Strecke $\overline{PQ}$ für $c = 1$:*

Wir benötigen die Schnittpunkte von f mit $y = 1$:

$$f(x) = 1 = -e^{2x} + 4e^x$$

$$e^{2x} - 4e^x = -1$$

$$e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$$

$$e^{x_{1,2}} = 2 \pm \sqrt{4 - 1} \quad | \quad p/q\text{-Formel}$$

$$e^{x_1} = 2 + \sqrt{3}; \quad e^{x_2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$x_1 = \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1,317$$

$$x_2 = \ln(2 - \sqrt{3}) \approx -1,317$$

$$P(-1,317|1); \quad Q(1,317|1)$$

P und Q sind symmetrisch zur y-Achse, somit halbiert die y-Achse die Strecke $\overline{PQ}$.

- 1.6 $g(x) = f(x) + f(-x)$

$$g(x) = -e^{2x} + 4e^x - e^{-2x} + 4e^{-x}$$

Prüfung auf Achsensymmetrie mit $g(x) = g(-x)$

$$g(-x) = -e^{-2x} + 4e^{-x} - e^{2x} + 4e^x = g(x)$$

Der Graph der Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Lösung A1/2022

1.1 Bestimmung des Funktionsterms einer Polynomfunktion:

Allgemeine Form einer Polynomfunktion 4. Grades

symmetrisch zu y-Achse:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

Zur Auflösung von a , b und c benötigen wir drei

Bedingungen:

$$(I) \quad f(0) = 4$$

$$(II) \quad f(2) = 2$$

$$(III) \quad f'(2) = 0$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$(I) \quad a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 4 \quad \rightarrow \quad c = 4$$

$$(II) \quad 16a + 4b + 4 = 2 \quad | \quad -4$$

$$(III) \quad 32a + 4b = 0$$

$$(II) \quad 16a + 4b = -2$$

$$(III) \quad 32a + 4b = 0$$

$$(III) - (II)$$

$$16a = 2$$

$$a = \frac{1}{8}$$

$$a \rightarrow (II)$$

$$2 + 4b = -2$$

$$4b = -4$$

$$b = -1$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 4$$

1.2.1 Die Faktorisierung von $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 4$ in die Form

$$f(x) = a(x + b)^2(x + c)^2 + 2$$

Die Funktion $f(x) - 2$ hat bei $x_1 = -b$ und $x_2 = -a$ doppelte Nullstellen. Doppelte Nullstellen berühren die x -Achse, sind also Extremstellen. Die beiden Extremstellen von $f(x) - 2$ liegen bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Damit ist $b = 2$ und $c = -2$. Wegen $\frac{1}{8}x^4$ ist

$$a = \frac{1}{8}.$$

$$f(x) = \frac{1}{8}(x + 2)^2(x - 2)^2 + 2$$

Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) 2021-heute

1.2.2 Begründung eines x -Wertes $x_0 < 2\sqrt{2}$

Eine nach unten geöffnete Parabel p mit Scheitelpunkt H hat die Funktionsgleichung. $p(x) = ax^2 + 4$ mit $a < 0$.

$$p(x) \cap f(x)$$

$$ax^2 + 4 = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 4$$

$$\frac{1}{8}x^4 - x^2 - ax^2 = 0$$

$$x^2 \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - 1 - a\right) = 0 \quad | \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$x_{1,2} = 0$$

$$\frac{1}{8}x^2 - 1 - a = 0$$

$$x^2 = 8 + 8a$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{8 + 8a}$$

Damit es überhaupt eine Lösung dieser Gleichung gibt, muss $-1 \leq a < 0$ sein. $a = -1$ scheidet aus, da sonst $x_{3,4} = 0$. Wegen $-1 < a < 0$ ist $x_3 < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

1.2.3 Größter Wert der ersten Ableitung von f für $-3 \leq x \leq 3$.

Größte bzw. kleinste Steigungen treten stets in den Wendepunkten des Graphen einer Funktion auf. Bei Beschränkungen des Definitionsbereichs sind stets auch Randbedingungen zu prüfen.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2$$

$$\frac{3}{2}x^2 - 2 = 0$$

$$\frac{3}{2}x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{4}{3}$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$f'\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 1,54$$

Prüfung der Randbedingung bei $x = 3$

$$f'(3) = \frac{27}{2} - 6 = 7,5$$

Die stärkste Steigung befindet sich in $x = 3$.

Abituraufgaben Analysis BG (Teil 2 mit Hilfsmittel) 2021-heute

1.3.1 g mit $g(x) = \cos(u \cdot x) + v$; $-3 \leq x \leq 3$ hat nur die drei Extrempunkte T_1 , H und T_2 .

Bestimmung der Werte von u und v :

$$u = \frac{2\pi}{p} \text{ mit } p = 4 \text{ (Entfernung der beiden Tiefpunkte)}$$

$$u = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$v = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + 3.$$

1.3.2 Schaubild der Stammfunktion G von g mit $G(-3) = 0$.

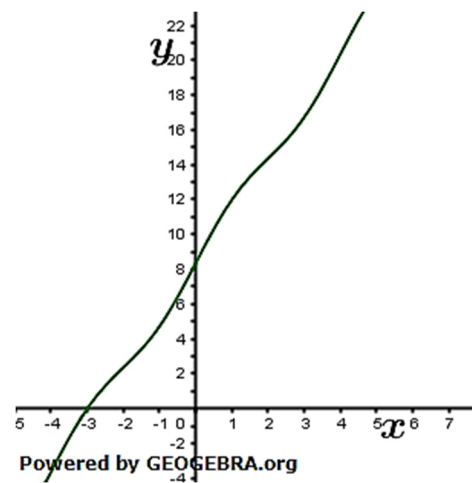
Wir bilden zunächst die Stammfunktion:

$$G(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) + 3x + C$$

$$G(-3) = 0 = \frac{2}{\pi} \cdot \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) - 9 + C$$

$$C = 9 - \frac{2}{\pi} \approx 8,36$$

$$G(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) + 3x + 8,36$$



Begründung von Aussagen:

- (1) Jede Stammfunktion von g besitzt eine Umkehrfunktion.

Funktionen besitzen Umkehrfunktionen, solange sie entweder monoton wachsend oder monoton fallend sind. G ist im gesamten Definitionsbereich monoton wachsend. $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ kann nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen, sodass stets $g(x) > 0$ ist.

- (2) Der Definitionsbereich ist ein Intervall der Länge $\int_{-3}^3 g(x) dx$.

Bei einer Umkehrfunktion wird der Wertebereich der Ausgangsfunktion zum Definitionsbereich. Der Wertebereich der Ausgangsfunktion bewegt sich jedoch zwischen $G(-3)$ und $G(3)$.

$\int_{-3}^3 g(x) dx = [G(x)]_{-3}^3 = G(3) - G(-3)$. Somit stimmt der Term mit der Länge des Intervalls überein.