

Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Aufgabe A1 (nicht für TG)



- 1.1 Drei Energieversorger A , B und C konkurrieren in einer Gemeinde um 2800 Haushalte. Werbeaktionen veranlassen am Jahresende viele Verbraucher, den Energieversorger zu wechseln. Von A wechseln 50 % zu B und 10 % zu C . Von B wechseln 20 % zu A und 10 % zu C . Von C wechseln 10 % zu A und 50 % zu B . Die Übrigen bleiben bei ihrem Versorger. Im Jahr 2014 sind 1000 Haushalte bei A und 1000 bei B , die übrigen bei C . Gib die Übergangsmatrix an. Berechne, wie viele Haushalte von den einzelnen Energieversorgern im Jahr 2015 beliefert werden. **4P**
- 1.2 In der Nachbargemeinde sind ebenfalls die Anbieter A und B sowie ein weiterer Anbieter D am Markt. Das Wechselverhalten der Haushalte wird mit folgender Tabelle beschrieben:

	A	B	D
A	0,3	0,2	u
B	0,5	0,6	v
D	0,2	0,2	w

- 1.2.1 Angenommen, u hat den Wert 0,1. Welche Werte für v und w sind dann möglich? **4P**
- Nimm Stellung zur Behauptung: Die Kunden von B zeigen mehr Kundentreue als die von A .
- 1.2.2 Bestimme u , v und w , sodass sich die Anteile der Haushalte bei den Anbietern A , B und D von einem Jahr zum anderen nicht ändern, wobei sich die Anteile von A , B und D wie 1:3:1 verhalten. **7P**

Aufgabe A2 (nicht für TG)

1. Im April ist das Wetter am Bodensee äußerst wechselhaft. Erfahrungsgemäß folgt auf einen überwiegend regnerischen Tag (R) mit 10 % Wahrscheinlichkeit ein überwiegend sonniger Tag (S) und mit 30 % Wahrscheinlichkeit ein überwiegend trüber Tag (T). Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag oder aber ein Regentag folgt, ist ebenfalls jeweils 30 %. Auf einen trüben Tag folgt mit 70 % Wahrscheinlichkeit ein Regentag und mit 20 % Wahrscheinlichkeit bleibt es trübe.
- 1.1 Veranschaulichen Sie diese Informationen in einem Übergangsgraphen und ergänzen Sie die fehlenden Angaben. **4P**
- 1.2 Ein Online-Wetterdienst sagt für den 1. April 2015 für die Bodenseeregion voraus, dass es mit 30 % Wahrscheinlichkeit regnet. Wie groß müssen die Wahrscheinlichkeiten für einen Sonnentag bzw. für einen trüben Tag am 1. April 2015 sein, damit die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Folgetag größer wird? **5P**

Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**

- 1.3 Es wird angenommen, dass sich die Übergangswahrscheinlichkeiten für die drei Wetterzustände R , S und T am Bodensee nicht ändern. Zeigen Sie, dass es dann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt, die auf Dauer stabil bleibt. **6P**

Aufgabe A3 (nicht für TG)

1. Der WV-Konzern produziert Personenkraftwagen seiner Marke an drei Standorten A , B und C . Um seine Wirtschaftlichkeit zu erhöhen, möchte das Unternehmen einen Teil der 2400 Mitarbeiter, die in der Produktion am Standort A arbeiten, langfristig in die zwei anderen Standorte B und C verlegen. Einige der nach Standort B und C versetzten Mitarbeiter sollen nach gewisser Zeit zurück zum Standort A kommen, um Wissenstransfer zu gewährleisten. Im Sinne einer langfristigen Personalentwicklung legt die Firma Quoten für den Wechsel der Standorte fest, die über mehrere Jahre stabil bleiben.

$$\begin{array}{c} \text{von} \\ \text{nach} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \quad M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

- 1.1 Stelle die Entwicklung der Mitarbeiterzahlen in einem Übergangsdiagramm dar. Berechne die Verteilung auf die Standorte A , B und C nach zwei Jahren. **7P**

- 1.2 Untersuche, ob es eine Verteilung mit insgesamt 2 400 Mitarbeitern gibt, die im nächsten Jahr gleichbleibt. Falls ja, gib diese Verteilung an. **5P**

- 1.3 Es gilt: $M^{20} = \begin{pmatrix} 0,250 & 0,250 & 0,250 \\ 0,256 & 0,256 & 0,244 \\ 0,494 & 0,494 & 0,506 \end{pmatrix}$ **2P**

Interpretiere die Einträge der mittleren Zeile dieser Matrix. Nimm an, dass der Prozess eine stabile Grenzmatrix aufweist. Gib gegebenenfalls Prognosen bezüglich der zukünftigen Verteilung der Mitarbeiter auf die Standorte ab.

Aufgabe A4 (nicht für TG)

1. Drei Mobilfunkanbieter A , B und C konkurrieren in einer Kleinstadt um 5600 Kunden. Werbeaktionen veranlassen am Jahresende viele Kunden, den Mobilfunkanbieter zu wechseln. Im Jahr 2015 sind 2000 Kunden bei A und 2000 bei B , die übrigen bei C .

Die Übergangsmatrix beschreibt das Wechselverhalten:

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,7 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

- 1.1 Fülle die Leerstellen aus: Zum Jahresende 2015 **3P**
- wechseln ... von A zu B und ... von A zu C.
 - wechseln ... von B zu A und ... von B zu C.
- Wie viele Kunden bleiben bei ihrem Anbieter?
- 1.2 Berechne, wie viele Kunden von den einzelnen Mobilfunkanbietern im Jahr 2015 beliefert werden. **2P**
- 1.3 Bei welcher Ausgangssituation würden sich die Anteile der Kunden bei den einzelnen Anbietern durch das angegebene Wechselverhalten nicht ändern? **10P**
- Stelle diese Verteilung in einem Kreisdiagramm dar.

Aufgabe A5 (nicht für TG)

1. Die Firma „Backe-Gutsle“ stellt verschiedene Plätzchen her, die sie in zwei verschiedenen Verpackungen anbietet. Die Plätzchen werden hauptsächlich aus Butter, Zucker, Mehl und Nüssen hergestellt. Die quantitativen Zusammenhänge sind durch die folgenden Tabellen gegeben.

Menge der Zutaten (g) pro Plätzchen

	Butterplätzchen	Nussplätzchen
Butter	2,5	1,5
Zucker	1,6	1
Mehl	2,5	2,5
Nüsse	0	2,5

Anzahl Plätzchen pro Packung

	Packung 1	Packung II
Butterplätzchen	5	7
Nussplätzchen	7	9

- 1.1 Stelle den zweistufigen Prozess in einem Verflechtungsdiagramm dar. **3P**
- 1.2 Die Firma soll einem Kunden 100 Packungen I und 150 Packungen II liefern. Wie viel Gramm an Zucker und Mehl sind hierfür notwendig? **4P**
- 1.3 Es wird festgestellt, dass noch 372 g Zucker und 682,5 g Mehl vorhanden sind. Welche Menge der anderen Zutaten muss beschafft werden, wenn alle Zutaten vollständig zu Plätzchen verarbeitet werden sollen. **4P**
- 1.4 Die Firma möchte eine neue Packung auf den Markt bringen. In dieser Packung sollen doppelt so viele Nuss- wie Butterplätzchen enthalten sein. Der Gewichtsverlust beim Backen ist vernachlässigbar. Das Gewicht des Packungsinhaltes soll 200 g nicht überschreiten. **4P**
- Wie viele Plätzchen von jeder Sorte sind maximal in der neuen Packung?

Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben
Aufgabe A6 (nicht für TG)

1. Die BIKERIDE GmbH stellt die Rahmen der Fahrradmodelle City und Tour in Eigenfertigung her. Um sich von der Konkurrenz abzuheben, werden für diese Rahmen jedes Jahr neue modische Lackierungen produziert. Dabei werden in einem zweistufigen Produktionsprozess zunächst aus den drei Ausgangsfarben R_1 , R_2 und R_3 die drei Modefarben Z_1 , Z_2 und Z_3 gemischt und aus diesen dann die Lackierungen für die Modelle City (E_1) und Tour (E_2) hergestellt. Es gelten folgende Mengenbeziehungen (in ME) mit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	3	1
R_2	0	2	2
R_3	3	5	4

	E_1	E_2
Z_1	1	2
Z_2	3	7
Z_3	a	5

	E_1	E
R_1	13	b
R_2	10	24
R_3	26	61

- 1.1 Berechne die Zahlenwerte für a und b in den Tabellen mithilfe der Matrizenrechnung. **3P**
- 1.2 Im Folgenden sei $a = 2$ und $b = 30$.
- 1.2.1 Die BIKERIDE GmbH benötigt für einen Auftrag 15 ME der Lackierung E_1 und 18 ME der Lackierung E_2 . Berechne, wie viele ME der drei Modefarben Z_1 , Z_2 und Z_3 für diesen Auftrag erforderlich sind. **3P**

- 1.2.2 Für eine Sonderlackierung können im Rahmen eines alternativen Produktionsprozesses die Modefarben Z_1 , Z_2 und Z_3 auch entsprechend der folgenden Matrix gemischt werden: **9P**

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Wegen Sanierungsarbeiten am Boden der Lagerhalle muss das Rohstofflager kurzfristig geräumt werden. Der Lagerbestand von R_1 beträgt 600 ME, der von R_2 beträgt 800 ME und von R_3 befinden sich noch 1600 ME im Lager.

Bestimme den ökonomisch sinnvollen Lösungsvektor, mit welchem der Lagerbestand im Rahmen des alternativen Produktionsprozesses ohne Rest aufgebraucht wird. Gib eine sinnvolle Lösung an.

Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben
Aufgabe A7 (nicht für TG)

1. Ein Reisebüro pflegt eine Datei mit Adressen von langjährigen Stammkunden. Dabei wird unterschieden zwischen den Kunden, die im abgelaufenen Jahr genau einen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe E), Kunden, die im abgelaufenen Jahr mehr als einen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe M), und Kunden, die im abgelaufenen Jahr keinen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe K).

Das folgende jährliche Wechselverhalten der Kunden ist zu beobachten:

10 % der Kunden aus Gruppe E werden zu Kunden der Gruppe M

15 % der Kunden aus Gruppe E werden zu Kunden der Gruppe K

20 % der Kunden aus Gruppe M werden zu Kunden der Gruppe E

20 % der Kunden aus Gruppe M werden zu Kunden der Gruppe K

57 % der Kunden aus Gruppe K werden zu Kunden der Gruppe E

28 % der Kunden aus Gruppe K werden zu Kunden der Gruppe M

- 1.1 Gib eine stochastische Übergangsmatrix an, die dieses Verhalten beschreibt. **3P**

- 1.2 Vervollständige $A^2 = \begin{pmatrix} 0,668 & \dots & 0,569 \\ 0,177 & 0,436 & \dots \\ 0,155 & \dots & 0,164 \end{pmatrix}$ und interpretiere **5P**

den Eintrag in der dritten Zeile und ersten Spalte sowie den Eintrag in der zweiten Zeile und zweiten Spalte.

Aufgrund einer Änderung des Buchungsverhaltens gilt nun die folgende Übergangsmatrix:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & q \\ 0,1 & 0,6 & 0,95 - q \\ 0,1 & 0,2 & 0,05 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq q \leq 0,95$$

Im Jahr 2016 gehören 3100 Kunden zur Gruppe E , 1300 Kunden zur Gruppe M und 600 Kunden zur Gruppe K .

- 1.3 Zeige, dass diese Verteilung für $q = 0,6$ stabil ist. **2P**
- 1.4 Ermittle den Wert von q für den Fall, dass sich im Jahr 2017 herausstellt, dass 1342 Kunden in diesem Jahr mehr als einen Urlaub gebucht haben. Gib die Verteilung für 2017 an. **5P**

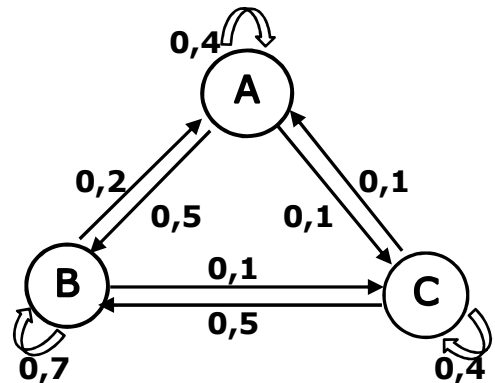
Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Lösung A1

1.1 Übergangsmatrix

Die Übergangsmatrix lautet (vgl. Diagramm):

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,7 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$



Verteilung der Haushalte im Jahr 2015

Stand 2014: 1000 Haushalte bei Versorger A
 1000 Haushalte bei Versorger B
 800 Haushalte bei Versorger C

Summe: 2800

Mit der Übergangsmatrix M gilt für die Verteilung der Haushalte im Jahr 2015:

$$\begin{pmatrix} A_{2015} \\ B_{2015} \\ C_{2015} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} A_{2014} \\ B_{2014} \\ C_{2014} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,7 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 800 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1000 \cdot 0,4 & 1000 \cdot 0,2 & 800 \cdot 0,1 \\ 1000 \cdot 0,5 & 1000 \cdot 0,7 & 800 \cdot 0,5 \\ 1000 \cdot 0,1 & 1000 \cdot 0,1 & 800 \cdot 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 680 \\ 1600 \\ 520 \end{pmatrix}$$

Im Jahr 2015 beliefert Versorger A 680 Haushalte, Versorger B beliefert 1600 Haushalte und Versorger C beliefert 520 Haushalte.

1.2.1 Mögliche Werte der Übergangsmatrix

Die Summe der Elemente der Spaltenvektoren muss gleich 1 sein (100 %), somit muss gelten:

$$u + v + w = 1$$

Mit $u = 0,1$ folgt $v + w = 0,9$

$\Rightarrow v$ und w können jeweils Werte zwischen 0 und 0,9 annehmen, Es gilt aber immer $v = 0,9 - w$ bzw. $w = 0,9 - v$.

Beurteilung der Kundentreue

In der Diagonalen der Übergangsmatrix (bzw. der Tabelle) stehen die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Haushalt im kommenden Jahr bei seinem Energieversorger bleibt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Haushalt bei seinem Energieversorger A bleibt, liegt bei 30 %, bei Versorger B liegt die Wahrscheinlichkeit bei 60 %. Die Kunden von Versorger B bleiben also mit einer höheren Wahrscheinlichkeit bei ihrem Versorger als die Kunden vom Versorger A.

$\Rightarrow$ Die Behauptung kann als richtig angenommen werden.

Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

1.2.2 Gleichbleibende Verteilung der Haushalte

Die Anteile der Haushalte sollen sich verhalten wie 1:3:1, d. h., in einem Jahr gilt: $A_1 = x$; $B_1 = 3x$; $D = x$.

Mithilfe der Übergangsmatrix werden die Anteile für das nächste Jahr berechnet:

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & u \\ 0,5 & 0,6 & v \\ 0,2 & 0,2 & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot 0,3 & B_1 \cdot 0,2 & D_1 \cdot u \\ A_1 \cdot 0,5 & B_1 \cdot 0,6 & D_1 \cdot v \\ A_1 \cdot 0,2 & B_1 \cdot 0,2 & D_1 \cdot w \end{pmatrix}$$

Die Anteile sollen sich aber nicht ändern, d. h., es soll gelten $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ und $D_1 = D_2$. Damit und mit $A_1 = x$, $B_1 = 3x$ und $D_1 = x$ ergeben sich drei Gleichungen:

$$x = x \cdot 0,3 + 3x \cdot 0,2 + x \cdot u \Rightarrow 0,1x = x \cdot u \Rightarrow u = 0,1$$

$$3x = x \cdot 0,5 + 3x \cdot 0,6 + x \cdot v \Rightarrow 0,7x = x \cdot v \Rightarrow v = 0,7$$

$$x = x \cdot 0,2 + x \cdot 0,2 + x \cdot w \Rightarrow 0,2x = x \cdot w \Rightarrow w = 0,2$$

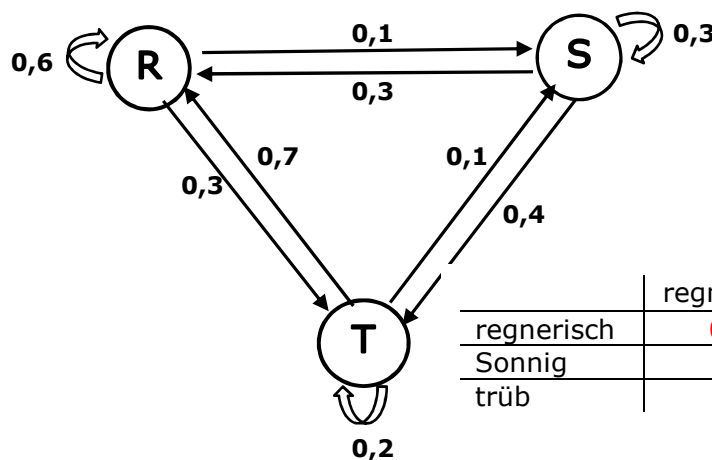
$$u + v + w = 0,1 + 0,7 + 0,2 = 1$$

Lösung A2

1.1 Übergangsgraph

In der Tabelle stehen in den Spalten jeweils die Wahrscheinlichkeiten des Wetters für den folgenden Tag. Auf einen regnerischen Tag folgt beispielsweise mit 10 % Wahrscheinlichkeit ein sonniger Tag.

In Summe muss sich in jeder Spalte der Wert 1 ergeben, da auf jeden Fall einer der drei Wetterzustände auftritt. Die im Aufgabentext fehlenden Werte sind hier rot markiert.



	regnerisch	sonnig	trüb
regnerisch	0,6	0,3	0,7
Sonnig	0,1	0,3	0,1
trüb	0,3	0,4	0,2

1.2 Bedingungen für die Wetterwahrscheinlichkeiten

Aus der Tabelle bzw. dem Graphen von 1.1 ergibt sich die Übergangsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Für den 1. April ist nur die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag bekannt (30 %). Mit der Bedingung, dass die Summe der Elemente den Wert 1 ergeben muss, ergibt sich der „Wettervektor“ für den 1. April 2015 zu:

$$\vec{w}_{1. April} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ x \\ 0,7 - x \end{pmatrix}$$

Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) *Musteraufgaben*

Der Wettervektor für den 2. April ergibt sich mit der Übergangsmatrix zu:

$$\vec{w}_{2. April} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 \\ x \\ 0,7 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,18 + 0,3x + 0,49 - 0,7x \\ 0,03 + 0,3x + 0,07 - 0,1x \\ 0,09 + 0,4x + 0,14 - 0,2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,67 - 0,4x \\ 0,10 + 0,2x \\ 0,23 + 0,2x \end{pmatrix}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Folgetag soll größer werden, d.h.:
 $0,10 + 0,2x > x \Rightarrow 0,1 > 0,8x \Rightarrow x < 0,125$

Für die Wahrscheinlichkeit eines trüben Tages ergibt sich damit die Bedingung:

$$0,7 - x > 0,7 - 0,125 = 0,575$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Tag am 1. April muss also kleiner sein als 12,5 % und die Wahrscheinlichkeit für einen trüben Tag muss grösser sein als 57,5 %.

1.3 Stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung

Für eine stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung $\vec{x}$ mit den angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten und der Übergangsmatrix A aus 1.2 muss gelten:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{x} \Rightarrow A \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow (A - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Mit

$$(A - E) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & -0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & -0,8 \end{pmatrix}$$

ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0,4 & 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0,1 & -0,7 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0,4 & -0,8 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -0,4 & 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & -2,5 & 1,1 & 0 \\ 0 & 2,5 & -1,1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -0,4 & 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & -2,5 & 1,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen.

Mit $x_3 = t$ ergibt sich $x_2 = 0,44t$ und $x_1 = 2,08t$ und somit der Lösungsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2,08t \\ 0,44t \\ t \end{pmatrix}$$

Bei der Lösung für die stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung muss die Summe der einzelnen Elemente den Wert 1 haben:

$$2,08t + 0,44t + t = 1 \Rightarrow t = 0,284$$

Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,591 \\ 0,125 \\ 0,284 \end{pmatrix}$ ergibt sich eine auf Dauer stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Lösung A3

1.1 Übergangsdiagramm

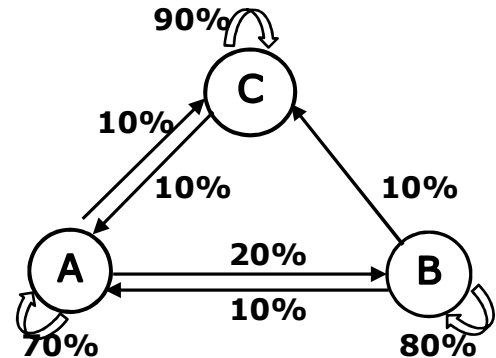
Die Übergangsmatrix lautet (vgl. Diagramm):

Verteilung nach einem Jahr:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1680 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix}$$

Verteilung nach zwei Jahren:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1680 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1248 \\ 720 \\ 432 \end{pmatrix}$$



Verteilung der 2400 Mitarbeiter auf die drei Standorte:

Standort A: 1248 Mitarbeiter

Standort B: 720 Mitarbeiter

Standort C: 432 Mitarbeiter

1.2 Ansatz für die langfristige Verteilung: $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $x + y + z = 2400$.

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \cdot 0,7 & y \cdot 0,1 & z \cdot 0,1 \\ x \cdot 0,2 & y \cdot 0,8 & z \cdot 0 \\ x \cdot 0,1 & y \cdot 0,1 & z \cdot 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{array}{lcl} \text{(I)} & 0,7x + 0,1y + 0,1z = x & | \quad -x \\ \text{(II)} & 0,2x + 0,8y + 0 = y & | \quad -y \\ \text{(III)} & 0,1x + 0,1y + 0,9z = z & | \quad -z \\ \text{(I)} & -0,3x + 0,1y + 0,1z = 0 & \\ \text{(II)} & 0,2x - 0,2y + 0 = 0 & | \quad 0,3 \cdot \text{II} + 0,2 \cdot \text{I} \\ \text{(III)} & 0,1x + 0,1y - 0,1z = 0 & | \quad 0,3 \cdot \text{III} + 0,1 \cdot \text{I} \\ \text{(I)} & -0,3x + 0,1y + 0,1z = 0 & \\ \text{(II)} & 0 - 0,04y + 0,02z = 0 & | \quad \text{II} \cdot 10 \\ \text{(III)} & 0 + 0,04y - 0,02z = 0 & | \quad \text{III} + \text{II} \\ \text{(I)} & -0,3x + 0,1y + 0,1z = 0 & \\ \text{(II)} & 0 - 0,4y + 0,2z = 0 & \\ \text{(III)} & 0 + 0 + 0 = 0 & \end{array}$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit $-0,4y + 0,2z = 0 \Rightarrow y = 0,5z$

$y = 0,5z \rightarrow \text{(I)}$

$$-0,3x + 0,1 \cdot 0,5z + 0,1z = 0$$

$$-0,3x + 0,15z = 0 \Rightarrow x = 0,5z$$

Einsetzen in $x + y + z = 2400$

$$0,5z + 0,5z + z = 2400 \Rightarrow z = 1200$$

Das LGS hat die Lösung 1 $y = 600$; $z = 1200$

Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Für die stationäre Verteilung auf die drei Standorte gilt:

Standort A: 600 Mitarbeiter

Standort B: 600 Mitarbeiter

Standort C: 1200 Mitarbeiter

Hinweis:

Mit $x + y + z = 1$ (100 %) erhält man $x = \frac{1}{4}$; $x = \frac{1}{4}$; $z = \frac{1}{2}$

- 1.3 M^{20} ist die Übergangsmatrix, mit welcher, beispielsweise ausgehend von der Anfangsverteilung, die Verteilung in 20 Jahren bestimmt werden kann.

Interpretation der Einträge in der mittleren Zeile:

- 25,6 % der Mitarbeiter, die heute im Standort A arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.
- 25,6 % der Mitarbeiter, die heute im Standort B arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.
- 24,4 % der Mitarbeiter, die heute im Standort C arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.

Bei M^{20} fällt auf, dass die Koeffizienten in der ersten Zeile übereinstimmen (auf 3 Stellen). Alle haben den Wert 0,25. Es ist zu vermuten, dass sich dieser Wert langfristig nicht mehr deutlich ändern wird und schon näherungsweise dem Wert der Grenzmatrix entspricht.

Somit werden langfristig ca. 25 % aller Mitarbeiter in Standort A arbeiten. Die Werte in den Zeilen 2 und 3 stimmen z. T. überein oder sind recht ähnlich, sodass eine Prognose zu den entsprechenden Mitarbeiterzahlen abgegeben werden kann.

Langfristig werden ca. 25 % aller Mitarbeiter in Standort B und 50 % am Standort C arbeiten.

Hinweis:

Die exakten Werte in einer Spalte der Grenzmatrix sind: $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$

Lösung A4

- 1.1 Von A wechseln 50 % zu B und 10 % zu C.

Von B wechseln 20 % zu A und 10 % zu C.

40 % bleiben bei ihrem Versorger A, also 800.

70 % bleiben bei ihrem Versorger B, also 1400.

40 % bleiben bei ihrem Versorger C, also 640.

$$1.2 \quad M \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,7 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1360 \\ 3200 \\ 1040 \end{pmatrix}$$

Mobilfunkanbieter A beliefert 1360 Kunden, B 3200 Kunden und C 1040 Kunden.

Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

1.3 Ansatz für die langfristige Verteilung: $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$ und $x + y + z = 5600$.

$$M \cdot \vec{x} = \vec{x} \Rightarrow (E - M) \cdot \vec{x} = \vec{0} \text{ mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5600 - x - y \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,7 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5600 - x - y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} x \cdot 0,6 & -y \cdot 0,2 & -z \cdot 0,1 \\ -x \cdot 0,5 & y \cdot 0,3 & -z \cdot 0,5 \\ -x \cdot 0,1 & -y \cdot 0,1 & z \cdot 0,6 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Hieraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 0,6x - 0,2y - 0,1z = 0 \\ \text{(II)} & -0,5x + 0,3y - 0,5z = 0 \quad | \quad 0,6 \cdot II + 0,5 \cdot I \\ \text{(III)} & -0,1x - 0,1y + 0,6z = 0 \quad | \quad 0,6 \cdot III + 0,1 \cdot I \\ \text{(I)} & 0,6x - 0,2y - 0,1z = 0 \\ \text{(II)} & 0 + 0,08y - 0,35z = 0 \quad | \quad 10 \cdot II \\ \text{(III)} & 0 - 0,08y + 0,35z = 0 \quad | \quad 10 \cdot III + II \\ \text{(I)} & 0,6x - 0,2y - 0,1z = 0 \\ \text{(II)} & 0 + 0,8y - 3,5z = 0 \\ \text{(III)} & 0 + 0 + 0 = 0 \end{array}$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit $0,8y - 3,5z = 0 \Rightarrow y = 4,375z$

$y = 4,375z \rightarrow (I)$

$$0,6x - 0,2 \cdot 4,375z - 0,1z = 0$$

$$0,6x - 0,975z = 0 \Rightarrow x = 1,625z$$

Einsetzen in $x + y + z = 5600$

$$1,625z + 4,375z + z = 5600 \Rightarrow z = 800$$

Das LGS hat die Lösung $x = 1300$; $y = 3500$; $z = 800$

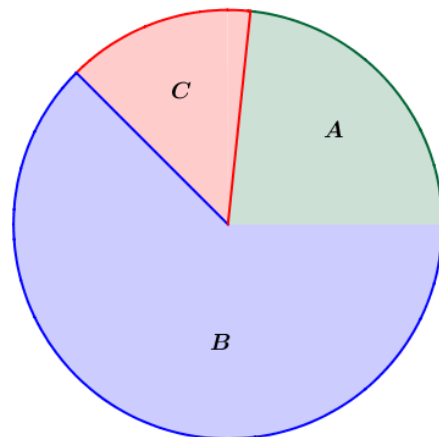
Wenn 1300 Kunden von A, 3500 von B und 800 von C beliefert werden, gibt es keine Änderung.

Kreisdiagramm:

$$A: \frac{1300}{5600} \triangleq 84^\circ$$

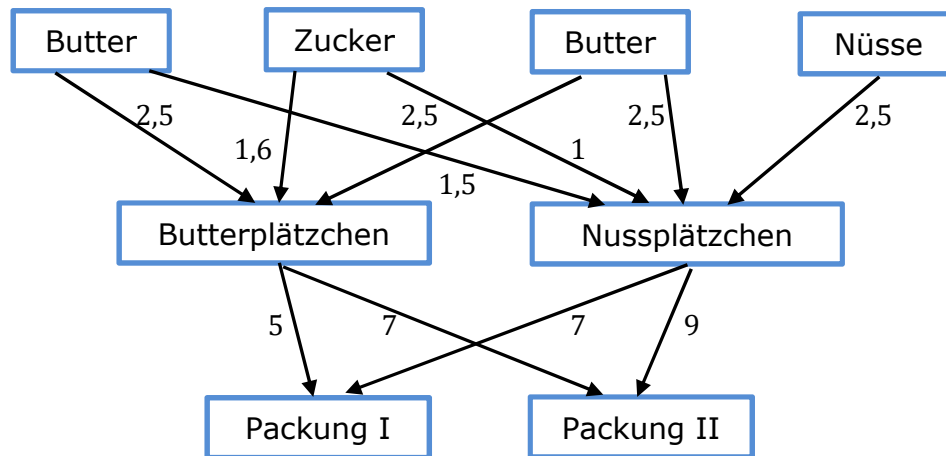
$$B: \frac{3500}{5600} \triangleq 225^\circ$$

$$C: \frac{800}{5600} \triangleq 51^\circ$$



Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben Lösung A5

1.1 Verflechtungsdiagramm



1.2 Im Folgenden bezeichnen A die Zutaten-Plätzchen-Matrix und B die Plätzchen-Packungen-Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2,5 & 1,5 \\ 1,6 & 1 \\ 2,5 & 2,5 \\ 0 & 2,5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Aus $\vec{z} = B \cdot \vec{x}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}$ folgt :

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1550 \\ 2050 \end{pmatrix}$$

Aus $\vec{r} = A \cdot \vec{z}$ folgt :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2,5 & 1,5 \\ 1,6 & 1 \\ 2,5 & 2,5 \\ 0 & 2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1550 \\ 2050 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6950 \\ 4530 \\ 9000 \\ 5125 \end{pmatrix}$$

Für die Produktion von 100 Packungen I und 150 Packungen II werden 4530 g Mehl und 9000 g Zucker benötigt.

1.3 Aus $\vec{r} = A \cdot \vec{z}$ mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 372 \\ 682,5 \\ r_2 \end{pmatrix}$ folgt:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ 372 \\ 682,5 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 1,5 \\ 1,6 & 1 \\ 2,5 & 2,5 \\ 0 & 2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad 2,5z_1 + 1,5z_2 = r_1$$

$$(2) \quad 1,6z_1 + z_2 = 372$$

$$(3) \quad 2,5z_1 + 2,5z_2 = 682,5 \quad | \quad (3) - 2,5 \cdot (2)$$

$$(4) \quad 2,5z_2 = r_2$$

$$(1) \quad 2,5z_1 + 1,5z_2 = r_1$$

$$(2) \quad 1,6z_1 + z_2 = 372$$

$$(3) \quad -1,5z_1 + 0z_2 = -247,5 \Rightarrow z_1 = 165$$

$$(4) \quad 2,5z_2 = r_2$$

Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) *Musteraufgaben*

$$z_1 \rightarrow (2):$$

$$(2) \quad 1,6 \cdot 165 + z_2 = 372 \Rightarrow z_2 = 108$$

$$z_1, z_2 \rightarrow (1):$$

$$(1) \quad 2,5 \cdot 165 + 1,5 \cdot 108 = r_1 \Rightarrow r_1 = 574,5$$

$$z_2 \rightarrow (4):$$

$$(4) \quad 2,5 \cdot 108 = r_2 \Rightarrow r_2 = 270$$

Es müssen somit noch 574,5 g Butter und 270 g Mehl beschafft werden.

- 1.4 Die beschriebene Anzahl Plätzchen führt auf $\vec{z} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \end{pmatrix}$:

Die Menger der Zutaten erhält man aus:

$$\vec{r} = \mathbf{A} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 2,5 & 1,5 \\ 1,6 & 1 \\ 2,5 & 2,5 \\ 0 & 2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5z \\ 3,6z \\ 7,5z \\ 5z \end{pmatrix}$$

Das Gesamtgewicht beträgt somit $5,5z + 3,6z + 7,5z + 5z = 21,6z$, welches 200 g nicht überschreiten soll:

$$21,6z \leq 200 \text{ für } z \leq 9,2.$$

In der neuen Packung sind somit 9 Butterplätzchen und 18 Nussplätzchen.

Lösung A6

- 1.1 *Bestimmung von a und b:*

Multiplikation von Zeile 1 der (R,Z)-Matrix mit Spalte 1 der (Z,E)-Matrix ergibt:

$$2 + 9 + a = 13 \Rightarrow a = 2$$

Multiplikation von Zeile 1 der (R,Z)-Matrix mit Spalte 2 der (Z,E)-Matrix ergibt:

$$4 + 21 + 5 = b \Rightarrow b = 30$$

1.2.1 Es gilt: $\mathbf{B}_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 171 \\ 120 \end{pmatrix}$

Für diesen Auftrag sind 51 ME Z1, 171 ME Z2 und 120 ME Z3 erforderlich.

1.2.2 $\mathbf{M}_{RZ} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 1600 \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{M}_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ führt zu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 1600 \end{pmatrix} \text{ und dem LGS:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 600 \\ 0 & 2 & 2 & 800 \\ 4 & 7 & 3 & 1600 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 600 \\ 0 & 2 & 2 & 800 \\ 0 & 1 & 1 & 400 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 600 \\ 0 & 2 & 2 & 800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen, wir wählen einen Parameter frei, z.

B. $z_3 = t$.

$$2z_2 + 2t = 800 \Rightarrow z_2 = 400 - t$$

$$2z_2 + 3 \cdot (400 - t) + t = 600 \Rightarrow z_1 = t - 300$$

Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Die Lösung ist ökonomisch sinnvoll, wenn die Elemente der Lösung nicht negativ sind:

$$z_3 = t \geq 0$$

$$z_2 = 400 - t \geq 0 \text{ für } t \leq 400$$

$$z_1 = t - 300 \geq 0 \text{ für } t \geq 300$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} t - 300 \\ 400 - t \\ t \end{pmatrix} \text{ ist ökonomisch sinnvoll für } 300 \leq t \leq 400.$$

Eine mögliche sinnvolle Lösung:

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Lösung A7

1.1 Stochastische Übergangsmatrix::

$$A = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,2 & 0,57 \\ 0,1 & 0,6 & 0,28 \\ 0,15 & 0,2 & 0,15 \end{pmatrix}$$

1.2 Vervollständigung von A^2 :

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,2 & 0,57 \\ 0,1 & 0,6 & 0,28 \\ 0,15 & 0,2 & 0,15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,75 & 0,2 & 0,57 \\ 0,1 & 0,6 & 0,28 \\ 0,15 & 0,2 & 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,668 & 0,384 & 0,569 \\ 0,177 & 0,436 & 0,267 \\ 0,155 & 0,18 & 0,164 \end{pmatrix}$$

Beispiel für die Berechnung der Spalte zwei von A^2 :

$$a_{12}^2 = (0,75 \quad 0,2 \quad 0,57) \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix} = 0,75 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,6 + 0,57 \cdot 0,2 = 0,384$$

$$a_{22}^2 = (0,1 \quad 0,6 \quad 0,28) \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix} = 0,1 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,6 + 0,28 \cdot 0,2 = 0,436$$

$$a_{32}^2 = 1 - a_{12}^2 - a_{22}^2 = 1 - 0,384 - 0,436 = 0,18$$

Interpretation:

Dritte Zeile erste Spalte: 0,155

15,5 % der Kunden, die heute in Gruppe E sind, gehören in zwei Jahren zur Gruppe K.

Zweite Zeile zweite Spalte: 0,436

43,6 % der Kunden, die heute in Gruppe M sind, gehören in zwei Jahren wieder zur Gruppe M.

1.3 Für $q = 0,6$ erhalten wir: $A^* = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,35 \\ 0,1 & 0,2 & 0,05 \end{pmatrix}$

Für eine stabile Verteilung gilt: $A^* \cdot \vec{x} = \vec{x}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,35 \\ 0,1 & 0,2 & 0,05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Auf den rechnerischen Nachweis wird hier verzichtet.

Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

1.4 Aus dem Aufgabentext lesen wir ab:

$$\vec{x}_{2016} = \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_{2017} = \begin{pmatrix} x \\ 1342 \\ z \end{pmatrix}$$

$$A^* \cdot \vec{x}_{2016} = \vec{x}_{2017}$$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & q \\ 0,1 & 0,6 & 0,95 - q \\ 0,1 & 0,2 & 0,05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1342 \\ z \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation von Zeile zwei mit $\vec{x}_{2016}$ ergibt:

$$0,1 \cdot 3100 + 0,6 \cdot 1300 + (0,95 - q) \cdot 600 = 1342$$

$$-600q + 1660 = 1342$$

$$q = 0,53$$

Verteilung für 2017:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,53 \\ 0,1 & 0,6 & 0,42 \\ 0,1 & 0,2 & 0,05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3058 \\ 1342 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Hinweis zur Berechnung von Zeile 3 Spalte 1 des Ergebnisvektors:

$$z = 5000 - x - y = 5000 - 3058 - 1342 = 600$$