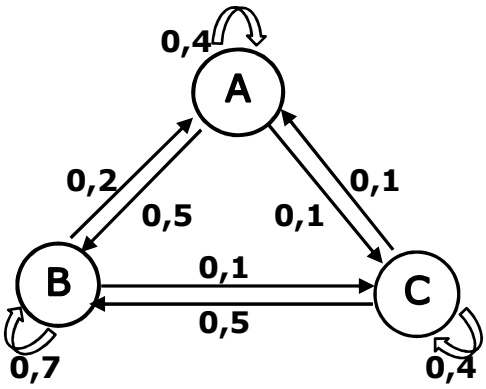
Abitur Matrizen und Prozesse *(Teil 4 mit Hilfsmittel)* *Musteraufgaben*

Lösung A1

1.1 *Übergangsmatrix*

Die Übergangsmatrix lautet (vgl. Diagramm):

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$



Verteilung der Haushalte im Jahr 2015

Stand 2014: 1000 Haushalte bei Versorger A
1000 Haushalte bei Versorger B
800 Haushalte bei Versorger C
Summe: 2800

Mit der Übergangsmatrix $\boldsymbol{M}$ gilt für die Verteilung der Haushalte im Jahr 2015:

$$\begin{pmatrix} A_{2015} \\ B_{2015} \\ C_{2015} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \cdot \begin{pmatrix} A_{2014} \\ B_{2014} \\ C_{2014} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 800 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1000 \cdot 0{,}4 & 1000 \cdot 0{,}2 & 800 \cdot 0{,}1 \\ 1000 \cdot 0{,}5 & 1000 \cdot 0{,}7 & 800 \cdot 0{,}5 \\ 1000 \cdot 0{,}1 & 1000 \cdot 0{,}1 & 800 \cdot 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 680 \\ 1600 \\ 520 \end{pmatrix}$$

Im Jahr 2015 beliefert Versorger A 680 Haushalte, Versorger B beliefert 1600 Haushalte und Versorger C beliefert 520 Haushalte.

1.2.1 *Mögliche Werte der Übergangsmatrix*

Die Summe der Elemente der Spaltenvektoren muss gleich 1 sein ($100\,\%$), somit muss gelten:

$u + v + w = 1$

Mit $u = 0{,}1$ folgt $v + w = 0{,}9$

$\Rightarrow$ v und w können jeweils Werte zwischen 0 und $0{,}9$ annehmen, Es gilt aber immer $v = 0{,}9 - w$ bzw. $w = 0{,}9 - v$.

Beurteilung der Kundentreue

In der Diagonalen der Übergangsmatrix (bzw. der Tabelle) stehen die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Haushalt im kommenden Jahr bei seinem Energieversorger bleibt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Haushalt bei seinem Energieversorger A bleibt, liegt bei $30\,\%$, bei Versorger B liegt die Wahrscheinlichkeit bei $60\,\%$. Die Kunden von Versorger B bleiben also mit einer höheren Wahrscheinlichkeit bei ihrem Versorger als die Kunden vom Versorger A.

$\Rightarrow$ *Die Behauptung kann als richtig angenommen werden.*

1.2.2 Gleichbleibende Verteilung der Haushalte

Die Anteile der Haushalte sollen sich verhalten wie $1:3:1$, d. h., in einem Jahr gilt: $A_1 = x;\ B_1 = 3x;\ D = x$.

Mithilfe der Übergangsmatrix werden die Anteile für das nächste Jahr berechnet:

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & u \\ 0{,}5 & 0{,}6 & v \\ 0{,}2 & 0{,}2 & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot 0{,}3 & B_1 \cdot 0{,}2 & D_1 \cdot u \\ A_1 \cdot 0{,}5 & B_1 \cdot 0{,}6 & D_1 \cdot v \\ A_1 \cdot 0{,}2 & B_1 \cdot 0{,}2 & D_1 \cdot w \end{pmatrix}$$

Die Anteile sollen sich aber nicht ändern, d. h., es soll gelten $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ und $D_1 = D_2$. Damit und mit $A_1 = x$, $B_1 = 3x$ und $D_1 = x$ ergeben sich drei Gleichungen:

$x = x \cdot 0{,}3 + 3x \cdot 0{,}2 + x \cdot u \implies 0{,}1x = x \cdot u \implies u = 0{,}1$

$3x = x \cdot 0{,}5 + 3x \cdot 0{,}6 + x \cdot v \implies 0{,}7x = x \cdot v \implies v = 0{,}7$

$x = x \cdot 0{,}2 + x \cdot 0{,}2 + x \cdot w \implies 0{,}2x = x \cdot w \implies w = 0{,}2$

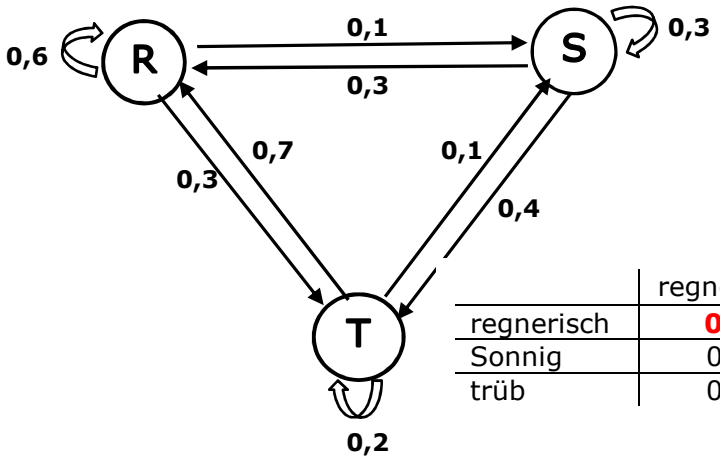
$u + v + w = 0{,}1 + 0{,}7 + 0{,}2 = 1$

Lösung A2

1.1 *Übergangsgraph*

In der Tabelle stehen in den Spalten jeweils die Wahrscheinlichkeiten des Wetters für den folgenden Tag. Auf einen regnerischen Tag folgt beispielsweise mit $10\,\%$ Wahrscheinlichkeit ein sonniger Tag.

In Summe muss sich in jeder Spalte der Wert 1 ergeben, da auf jeden Fall einer der drei Wetterzustände auftritt. Die im Aufgabentext fehlenden Werte sind hier rot markiert.



	regnerisch	sonnig	trüb
regnerisch	**0,6**	0,3	0,7
Sonnig	0,1	0,3	**0,1**
trüb	0,3	**0,4**	0,2

1.2 *Bedingungen für die Wetterwahrscheinlichkeiten*

Aus der Tabelle bzw. dem Graphen von 1.1 ergibt sich die Übergangsmatrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Für den 1. April ist nur die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag bekannt ($30\,\%$). Mit der Bedingung, dass die Summe der Elemente den Wert 1 ergeben muss, ergibt sich der „Wettervektor" für den 1. April 2015 zu:

$$\vec{w}_{1.April} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ x \\ 0{,}7 - x \end{pmatrix}$$

Der Wettervektor für den 2. April ergibt sich mit der Übergangsmatrix zu:

$$\vec{w}_{2.April} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ x \\ 0{,}7 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}18 + 0{,}3x + 0{,}49 - 0{,}7x \\ 0{,}03 + 0{,}3x + 0{,}07 - 0{,}1x \\ 0{,}09 + 0{,}4x + 0{,}14 - 0{,}2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}67 - 0{,}4x \\ 0{,}10 + 0{,}2x \\ 0{,}23 + 0{,}2x \end{pmatrix}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Folgetag soll größer werden, d.h.:

$0{,}10 + 0{,}2x > x \implies 0{,}1 > 0{,}8x \implies x < 0{,}125$

Für die Wahrscheinlichkeit eines trüben Tages ergibt sich damit die Bedingung:

$0{,}7 - x > 0{,}7 - 0{,}125 = 0{,}575$

Die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Tag am 1. April muss also kleiner sein als $12{,}5\,\%$ *und die Wahrscheinlichkeit für einen trüben Tag muss grösser sein als* $57{,}5\,\%$.

1.3 *Stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung*

Für eine stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung $\vec{x}$ mit den angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten und der Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$ aus 1.2 muss gelten:

$\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{x} \implies \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \implies (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Mit

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & -0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & -0{,}8 \end{pmatrix}$$

ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}7 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & -0{,}8 & 0 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 1{,}1 & 0 \\ 0 & 2{,}5 & -1{,}1 & 0 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 1{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen.

Mit $x_3 = t$ ergibt sich $x_2 = 0{,}44t$ und $x_1 = 2{,}08t$ und somit der Lösungsverktor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}08t \\ 0{,}44t \\ t \end{pmatrix}$$

Bei der Lösung für die stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung muss die Summe der einzelnen Elemente den Wert 1 haben:

$2{,}08t + 0{,}44t + t = 1 \implies t = 0{,}284$

Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}591 \\ 0{,}125 \\ 0{,}284 \end{pmatrix}$ ergibt sich eine auf Dauer stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Abitur Matrizen und Prozesse *(Teil 4 mit Hilfsmittel)* *Musteraufgaben*

Lösung A3

1.1 *Übergangsdiagramm*

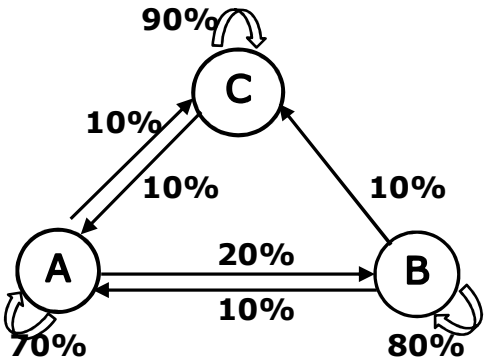
Die Übergangsmatrix lautet (vgl. Diagramm):

Verteilung nach einem Jahr:

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1680 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix}$$

Verteilung nach zwei Jahren:

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1680 \\ 480 \\ 240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1248 \\ 720 \\ 432 \end{pmatrix}$$



Verteilung der 2400 *Mitarbeiter auf die drei Standorte:*

Standort A: 1248 Mitarbeiter
Standort B: 720 Mitarbeiter
Standort C: 432 Mitarbeiter

1.2 Ansatz für die langfristige Verteilung: $\boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $x + y + z = 2400$.

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \cdot 0{,}7 & y \cdot 0{,}1 & z \cdot 0{,}1 \\ x \cdot 0{,}2 & y \cdot 0{,}8 & z \cdot 0 \\ x \cdot 0{,}1 & y \cdot 0{,}1 & z \cdot 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{array}{lll}
\text{(I)} & 0{,}7x + 0{,}1y + 0{,}1z = x & | \quad -x \\
\text{(II)} & 0{,}2x + 0{,}8y + 0 = y & | \quad -y \\
\text{(III)} & 0{,}1x + 0{,}1y + 0{,}9z = z & | \quad -z \\
\text{(I)} & -0{,}3x + 0{,}1y + 0{,}1z = 0 & \\
\text{(II)} & 0{,}2x - 0{,}2y + 0 = 0 & | \quad 0{,}3 \cdot II + 0{,}2 \cdot I \\
\text{(III)} & 0{,}1x + 0{,}1y - 0{,}1z = 0 & | \quad 0{,}3 \cdot III + 0{,}1 \cdot I \\
\text{(I)} & -0{,}3x + 0{,}1y + 0{,}1z = 0 & \\
\text{(II)} & 0 - 0{,}04y + 0{,}02z = 0 & | \quad II \cdot 10 \\
\text{(III)} & 0 + 0{,}04y - 0{,}02z = 0 & | \quad III + II \\
\text{(I)} & -0{,}3x + 0{,}1y + 0{,}1z = 0 & \\
\text{(II)} & 0 - 0{,}4y + 0{,}2z = 0 & \\
\text{(III)} & 0 + 0 + 0 = 0 &
\end{array}$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit $-0{,}4y + 0{,}2z = 0 \Longrightarrow y = 0{,}5z$

$y = 0{,}5z \longrightarrow (I)$

$-0{,}3x + 0{,}1 \cdot 0{,}5z + 0{,}1z = 0$

$-0{,}3x + 0{,}15z = 0 \Longrightarrow \quad x = 0{,}5z$

Einsetzen in $x + y + z = 2400$

$0{,}5z + 0{,}5z + z = 2400 \Longrightarrow \quad z = 1200$

Das LGS hat die Lösung 1 $\quad y = 600; \quad z = 1200$

Für die stationäre Verteilung auf die drei Standorte gilt:
Standort A: 600 Mitarbeiter
Standort B: 600 Mitarbeiter
Standort C: 1200 Mitarbeiter
Hinweis:
Mit $x+y+z=1$ (100 %) erhält man $x=\frac{1}{4};\ x=\frac{1}{4};\ z=\frac{1}{2}$

1.3 $\boldsymbol{M}^{20}$ ist die Übergangsmatrix, mit welcher, beispielsweise ausgehend von der Anfangsverteiung, die Verteilung in 20 Jahren bestimmt werden kann.
Interpretation der Einträge in der mittleren Zeile:

- 25,6 % der Mitarbeiter, die heute im Standort A arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.
- 25,6 % der Mitarbeiter, die heute im Standort B arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.
- 24,4 % der Mitarbeiter, die heute im Standort C arbeiten, arbeiten in 20 Jahren in Standort B.

Bei $\boldsymbol{M}^{20}$ fällt auf, dass die Koeffizienten in der ersten Zeile übereinstimmen (auf 3 Stellen). Alle haben den Wert 0,25. Es ist zu vermuten, dass sich dieser Wert langfristig nicht mehr deutlich ändern wird und schon näherungsweise dem Wert der Grenzmatrix entspricht.
Somit werden langfristig ca. 25 % aller Mitarbeiter in Standort A arbeiten. Die Werte in den Zeilen 2 und 3 stimmen z. T. überein oder sind recht ähnlich, sodass eine Prognose zu den entsprechenden Mitarbeiterzahlen abgegeben werden kann.
Langfristig werden ca. 25 % aller Mitarbeiter in Standort B und 50 % am Standort C arbeiten.
Hinweis:
Die exakten Werte in einer Spalte der Grenzmatrix sind: $\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2}$

Lösung A4

1.1 Von A wechseln 50 % zu B und 10 % zu C.
Von B wechseln 20 % zu A und 10 % zu C.
40 % bleiben bei ihrem Versorger A, also 800.
70 % bleiben bei ihrem Versorger B, also 1400.
40 % bleiben bei ihrem Versorger C, also 640.

1.2 $$\boldsymbol{M}\cdot\begin{pmatrix}2000\\2000\\1600\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1\\0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}5\\0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2000\\2000\\1600\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1360\\3200\\1040\end{pmatrix}$$
Mobilfunkanbieter A beliefert 1360 Kunden, B 3200 Kunden und C 1040 Kunden.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abitur Matrizen und Prozesse *(Teil 4 mit Hilfsmittel)* Musteraufgaben

1.3 Ansatz für die langfristige Verteilung: $\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$ und $x + y + z = 5600$.

$\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x} \Longrightarrow \ (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{M}) \cdot \vec{x} = \vec{o}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5600 - x - y \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5600 - x - y \end{pmatrix} = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} x \cdot 0{,}6 & -y \cdot 0{,}2 & -z \cdot 0{,}1 \\ -x \cdot 0{,}5 & y \cdot 0{,}3 & -z \cdot 0{,}5 \\ -x \cdot 0{,}1 & -y \cdot 0{,}1 & z \cdot 0{,}6 \end{pmatrix} = \vec{o}$$

Hieraus ergibt sich das LGS:

(I) $0{,}6x - 0{,}2y - 0{,}1z = 0$
(II) $-0{,}5x + 0{,}3y - 0{,}5z = 0$ | $0{,}6 \cdot II + 0{,}5 \cdot I$
(III) $-0{,}1x - 0{,}1y + 0{,}6z = 0$ | $0{,}6 \cdot III + 0{,}1 \cdot I$
(I) $0{,}6x - 0{,}2y - 0{,}1z = 0$
(II) $0 + 0{,}08y - 0{,}35z = 0$ | $10 \cdot II$
(III) $0 - 0{,}08y + 0{,}35z = 0$ | $10 \cdot III + II$
(I) $0{,}6x - 0{,}2y - 0{,}1z = 0$
(II) $0 + 0{,}8y - 3{,}5z = 0$
(III) $0 + 0 + 0 = 0$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit $0{,}8y - 3{,}5z = 0 \Longrightarrow y = 4{,}375z$

$y = 4{,}375z \longrightarrow (I)$

$0{,}6x - 0{,}2 \cdot 4{,}375z - 0{,}1z = 0$

$0{,}6x - 0{,}975z = 0 \Longrightarrow \ x = 1{,}625z$

Einsetzen in $x + y + z = 5600$

$1{,}625z + 4{,}375z + z = 5600 \Longrightarrow \ z = 800$

Das LGS hat die Lösung $x = 1300; \ y = 3500; \ z = 800$

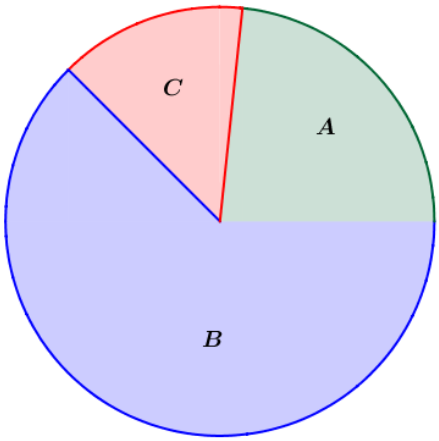
Wenn 1300 *Kunden von* A*,* 3500 *von* B *und* 800 *von* C *beliefert werden, gibt es keine Änderung.*

Kreisdiagramm:

A: $\frac{1300}{5600} \ \triangleq \ 84°$

B: $\frac{3500}{5600} \ \triangleq \ 225°$

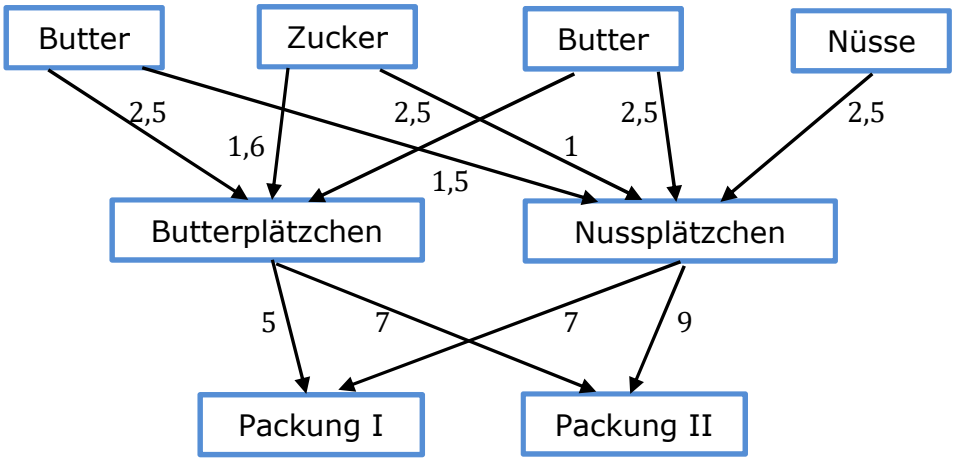
A: $\frac{800}{5600} \ \triangleq \ 51°$



Abitur Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben

Lösung A5

1.1 *Verflechtungsdiagramm*



1.2 Im Folgenden bezeichnen $\boldsymbol{A}$ die Zutaten-Plätzchen-Matrix und $\boldsymbol{B}$ die Plätzchen-Packungen-Matrix.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}6 & 1 \\ 2{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Aus $\vec{z} = \boldsymbol{B} \cdot \vec{x}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}$ folgt :

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1550 \\ 2050 \end{pmatrix}$$

Aus $\vec{r} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{z}$ folgt :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}6 & 1 \\ 2{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1550 \\ 2050 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6950 \\ 4530 \\ 9000 \\ 5125 \end{pmatrix}$$

Für die Produktion von 100 *Packungen I und* 150 *Packungen II werden* $4530\ g$ *Mehl und* $9000\ g$ *Zucker benötigt.*

1.3 Aus $\vec{r} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{z}$ mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 372 \\ 682{,}5 \\ r_2 \end{pmatrix}$ folgt:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ 372 \\ 682{,}5 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}6 & 1 \\ 2{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

(1) $2{,}5z_1 + 1{,}5z_2 = r_1$
(2) $1{,}6z_1 + z_2 = 372$
(3) $2{,}5z_1 + 2{,}5z_2 = 682{,}5 \qquad | \qquad (3) - 2{,}5 \cdot (2)$
(4) $2{,}5z_2 = r_2$

(1) $2{,}5z_1 + 1{,}5z_2 = r_1$
(2) $1{,}6z_1 + z_2 = 372$
(3) $-1{,}5z_1 + 0z_2 = -247{,}5 \implies z_1 = 165$
(4) $2{,}5z_2 = r_2$

$z_1 \longrightarrow (2)$:

(2) $1{,}6 \cdot 165 + z_2 = 372 \Longrightarrow \; z_2 = 108$

$z_1; z_2 \longrightarrow (1)$:

(1) $2{,}5 \cdot 165 + 1{,}5 \cdot 108 = r_1 \;\Longrightarrow\; r_1 = 574{,}5$

$z_2 \longrightarrow (4)$:

(4) $2{,}5 \cdot 108 = r_2 \;\Longrightarrow\; r_2 = 270$

Es müssen somit noch $574{,}5\ g$ Butter und $270\ g$ Mehl beschafft werden.

1.4 Die beschriebene Anzahl Plätzchen führt auf $\vec{z} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \end{pmatrix}$:

Die Menger der Zutaten erhält man aus:

$$\vec{r} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}6 & 1 \\ 2{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5z \\ 3{,}6z \\ 7{,}5z \\ 5z \end{pmatrix}$$

Das Gesamtgewichtbeträgt somit $5{,}5z + 3{,}6z + 7{,}5z + 5z = 21{,}6z$, welches $200\ g$ nicht überschreiten soll:

$21{,}6z \leq 200$ für $z \leq 9{,}2$.

In der neuen Packung sind somit 9 *Butterplätzchen und* 18 *Nussplätzchen.*

Lösung A6

1.1 *Bestimmung von* a *und* b*:*

Multiplikation von Zeile 1 der (R,Z)-Matrix mit Spalte 1 der (Z,E)-Matrix ergibt:

$2 + 9 + a = 13 \;\Longrightarrow\; a = 2$

Multiplikation von Zeile 1 der (R,Z)-Matrix mit Spalte 2 der (Z,E)-Matrix ergibt:

$4 + 21 + 5 = b \;\Longrightarrow\; b = 30$

1.2.1 Es gilt: $\boldsymbol{B}_{ZE} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 171 \\ 120 \end{pmatrix}$

Für diesen Auftrag sind $51\ ME\ \ Z1$, $171\ ME\ \ Z2$ *und* $120\ ME\ \ Z3$ *erforderlich.*

1.2.2 $\boldsymbol{M}_{RZ} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 1600 \end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{M}_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ führt zu:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 1600 \end{pmatrix}$ und dem LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 600 \\ 0 & 2 & 2 & 800 \\ 4 & 7 & 3 & 1600 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 600 \\ 0 & 2 & 2 & 800 \\ 0 & 1 & 1 & 400 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 600 \\ 0 & 2 & 2 & 800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen, wir wählen einen Parameter frei, z. B. $z_3 = t$.

$2z_2 + 2t = 800 \;\Longrightarrow\; z_2 = 400 - t$

$2z_2 + 3 \cdot (400 - t) + t = 600 \;\Longrightarrow\; z_1 = t - 300$

Die Lösung ist ökonomisch sinnvoll, wenn die Elemente der Lösung nicht negativ sind:

$z_3 = t \geq 0$

$z_2 = 400 - t \geq 0$ für $t \leq 400$

$z_1 = t - 300 \geq 0$ für $t \geq 300$

$\vec{z} = \begin{pmatrix} t - 300 \\ 400 - t \\ t \end{pmatrix}$ ist ökonomisch sinnvoll für $300 \leq t \leq 400$.

Eine mögliche sinnvolle Lösung:

$\vec{z} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 400 \end{pmatrix}$

Lösung A7

1.1 *Stochastische Übergangsmatrix::*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}28 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix}$$

1.2 *Vervollständigung von $\boldsymbol{A}^2$:*

$$\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}28 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}28 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}668 & 0{,}384 & 0{,}569 \\ 0{,}177 & 0{,}436 & 0{,}267 \\ 0{,}155 & 0{,}18 & 0{,}164 \end{pmatrix}$$

Beispiel für die Berechnung der Spalte zwei von $\boldsymbol{A}^2$:

$$a_{12}^2 = (0{,}75 \quad 0{,}2 \quad 0{,}57) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = 0{,}75 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}57 \cdot 0{,}2 = 0{,}384$$

$$a_{22}^2 = (0{,}1 \quad 0{,}6 \quad 0{,}28) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}28 \cdot 0{,}2 = 0{,}436$$

$$a_{32}^2 = 1 - a_{12}^2 - a_{32}^2 = 1 - 0{,}384 - 0{,}436 = 0{,}18$$

Interpretation:

Dritte Zeile erste Spalte: $0{,}155$

$15{,}5\,\%$ der Kunden, die heute in Gruppe E sind, gehören in zwei Jahren zur Gruppe K.

Zweite Zeile zweite Spalte: $0{,}436$

$43{,}6\,\%$ der Kunden, die heute in Gruppe M sind, gehören in zwei Jahren wieder zur Gruppe M.

1.3 Für $q = 0{,}6$ erhalten wir: $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}35 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix}$

Für eine stabile Verteilung gilt: $\boldsymbol{A}^* \cdot \vec{x} = \vec{x}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}35 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Auf den rechnerischen Nachweis wird hier verzichtet.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

1.4 Aus dem Aufgabentext lesen wir ab:

$\vec{x}_{2016} = \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_{2017} = \begin{pmatrix} x \\ 1342 \\ z \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}^* \cdot \vec{x}_{2016} = \vec{x}_{2017}$

$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & q \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}95 - q \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1342 \\ z \end{pmatrix}$

Die Multiplikation von Zeile zwei mit $\vec{x}_{2016}$ ergibt:

$0{,}1 \cdot 3100 + 0{,}6 \cdot 1300 + (0{,}95 - q) \cdot 600 = 1342$

$-600q + 1660 = 1342$

$q = 0{,}53$

Verteilung für 2017:

$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}53 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}42 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3058 \\ 1342 \\ 600 \end{pmatrix}$

Hinweis zur Berechnung von Zeile 3 Spalte 1 des Ergebnisvektors:

$z = 5000 - x - y = 5000 - 3058 - 1342 = 600$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de