Abituraufgaben Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) ab 2017

Aufgabe A1/2017

1.1 Ein Unternehmen stellt aus den beiden Rohstoffen R_1 und R_2 die drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 her. Aus den drei Zwischenprodukten entstehen die beiden Endprodukte E_1 und E_2. Die benötigten Rohstoffe je Mengeneinheiten (ME) der einzelnen Zwischenprodukte sowie die erforderlichen Zwischenprodukte zur Produktion je einer ME der Endprodukte sind in den nachfolgenden Tabellen angegeben.

Rohstoff-Zwischenprodukt

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	1	a
R_2	2	1	1

Zwischen-Endprodukt

	E_1	E
Z_1	1	0
Z_2	0	2
Z_3	2	1

Rohstoff-Endprodukt

	E_1	E
R_1	5	4
R_2	4	3

1.1.1 Zeigen Sie, dass a in der Rohstoff-Zwischenprodukt-Tabelle den Wert 2 hat. **2P**

1.1.2 Täglich werden $5\,ME$ von E_1 und $10\,ME$ von E_2 hergestellt. **2P**

1.1.2.1 Ein Mitarbeiter des Unternehmens behauptet, dass hierfür $65\,ME$ von R_1 und $50\,ME$ von R_2 benötigt werden. Überprüfen Sie die Behauptung.

1.1.2.2 Betrachten Sie die Matrizen

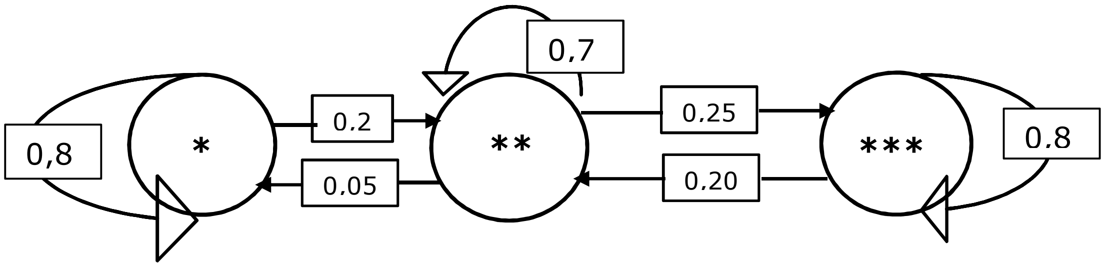
$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{D}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix};$$

Welche dieser drei Matrizen ist die Inverse der Rohstoff-Endprodukt-Matrix?
Begründen Sie.
Aufgrund von Problemen in der Produktion wurden an einem Tag nur $43\,ME$ von R_1 und $33\,ME$ von R_2 verarbeitet. **5P**
Bestimmen Sie, wie viele ME von E_1 und E_2 an diesem Tag produziert wurden.

1.2 Ein Institut prüft jährlich die Wasserqualität von Stränden in einer Urlaubsregion und vergibt hierfür ein bis drei Sterne. Ein Stern wird vergeben, wenn die Wasserqualität des Gewässers zum Baden ungeeignet ist. Bei zwei Sternen ist die Wasserqualität noch ausreichend, sodass Baden unbedenklich ist, und drei Sterne verweisen auf eine gute bis hervorragende Wasserqualität. **6P**

Abituraufgaben Matrizen und Prozesse *(Teil 4 mit Hilfsmittel)* *ab 2017*

Das nachfolgende Diagramm beschreibt die Übergangswahrscheinlichkeiten für eine Zeiteinheit von einem Jahr.



Geben Sie die Übergangsmatrix an.
Berechnen Sie den prozentualen Anteil der zum Baden ungeeigneten Strände, der sich langfristig einstellt.

Aufgabe A1/2018

1 In einer Simulation wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Heimspiele einer Fußballmannschaft regelmäßig von jeweils genau 50.000 Zuschauern besucht werden. Die Zuschauer reisen ausschließlich mit dem Auto (A), mit dem Bus bzw. der Bahn (B) oder zu Fuß bzw. dem Fahrrad (F) an.
Mit einem Auto können mehrere Zuschauer befördert werden. Die Zuschauer bilden also hinsichtlich der Anreise drei verschiedene Typen.

In der Simulation gilt das folgende Wechselverhalten der Zuschauertypen von einem Spieltag zum nächsten:

- Von A wechseln $25\,\%$ zu B.
- Von B wechseln $5\,\%$ zu F und $20\,\%$ zu A.
- Von F wechseln jeweils $10\,\%$ zu A und zu B.

Die restlichen Zuschauer wechseln nicht.

1.1 Stellen Sie dieses Wechselverhalten in einem Übergangsdiagramm dar. Ermitteln Sie die jeweilige Anzahl der Zuschauertypen am zweiten Heimspieltag, wenn man bei der Simulation annimmt, dass am ersten Heimspieltag alle Zuschauer zu Fuß bzw. dem Fahrrad kommen. **5P**

1.2 Bestimmen Sie die prozentualen Anteile der verschiedenen Zuschauertypen, sodass sich diese Anteile an zwei aufeinander folgenden Heimspieltagen nicht verändern. **4P**

1.3 Nun geht man in der Simulation davon aus, dass am zweiten Heimspieltag 27.000 Zuschauer vom Typ B und 3.000 Zuschauer vom Typ F kommen. Pro Auto reisen zudem immer durchschnittlich $2{,}5$ Zuschauer an.

1.3.1 Zeigen Sie, dass hierbei 8.000 Parkplätze am dritten Heimspieltag nicht ausreichen würden. **3P**

1.3.2 In der Simulation wird nun das Wechselverhalten der Autofahrer nach dem zweiten Heimspieltag so angepasst, dass die 8.000 Parkplätze am dritten Heimspieltag genau ausreichen. Das Wechselverhalten der anderen Zuschauertypen B und F ändert sich dabei nicht.
Ermitteln Sie den veränderten Prozentsatz von Zuschauern vom Typ A, die dann wieder mit dem Auto kommen. **3P**

Abituraufgaben Matrizen und Prozesse (Teil 4 mit Hilfsmittel) ab 2017

Lösung A1/2017

1.1.1 Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 2+a \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

De Ergebnismatrix stimmt mit $\boldsymbol{C}$ überein, wenn $a = 2$ ist.

1.2.1.1 Der Produktionsvektor ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Erforderliche Rohstoffmenge: $\boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 50 \end{pmatrix}$

Die Behauptung des Mitarbeiters stimmt.

1.2.1.2 Prüfung, ob $\boldsymbol{D}_1$ die Inverse von $\boldsymbol{C}$ ist:

$$\boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{D}_1$ kann nicht die Inverse sein, da der Eintrag oben links eine „1“ ergeben müsste.

Prüfung, ob $\boldsymbol{D}_2$ die Inverse von $\boldsymbol{C}$ ist:

$$\boldsymbol{D}_2 \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{D}_2$ kann nicht die Inverse sein, da der Eintrag oben links eine „1“ ergeben müsste.

Prüfung, ob $\boldsymbol{D}_3$ die Inverse von $\boldsymbol{C}$ ist:

$$\boldsymbol{D}_3 \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{D}_3$ ist die Inverse von $\boldsymbol{C}$, da als Ergebnis die Einheitsmatrix entsteht.

Der Rohstoffvektor ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} 43 \\ 33 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist der Produktionsvektor $\vec{p}$.

$$\boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \vec{r} \implies \vec{p} = \boldsymbol{C}^{-1} \cdot \vec{r} = \boldsymbol{D_3} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Von E1 wurden 3 ME und von E2 wurden 7 ME produziert.

1.2 Übergangsmatrix: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

Bedingung für stationäre Verteilung:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ sowie } x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

	x_1	x_2	x_3	$=$	
(1)	$-0{,}2$	$+0{,}05$		0	
(2)	$0{,}2$	$-0{,}3$	$+0{,}2$	0	(1)+(2)
(3)	0	$0{,}25$	$-0{,}2$	0	
(4)	1	1	1	1	$5\cdot$(1)+(4)

	x_1	x_2	x_3	$=$	
(1)	$-0{,}2$	$+0{,}05$		0	
(2)	0	$-0{,}25$	$+0{,}2$	0	
(3)	0	$0{,}25$	$-0{,}2$	0	(2)+(3)
(4)	0	$1{,}25$	1	1	$5\cdot$(2)+(4)

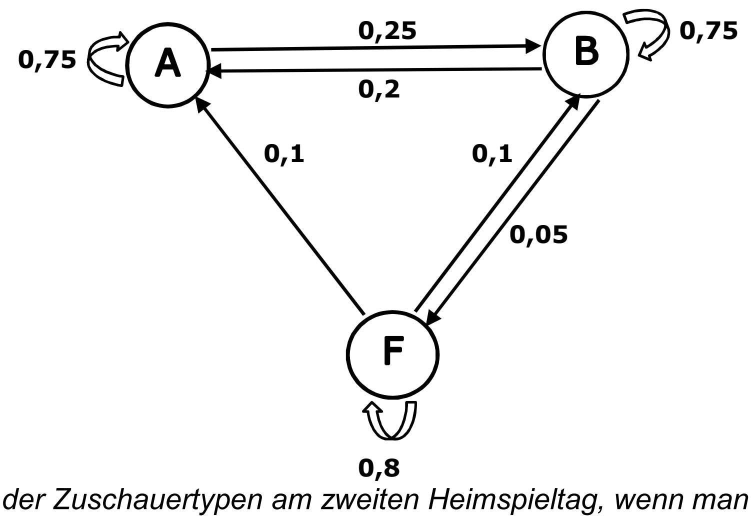
	x_1	x_2	x_3	$=$	
(1)	$-0{,}2$	$+0{,}05$		0	
(2)	0	$-0{,}25$	$+0{,}2$	0	
(3)	0	0	0	0	
(4)	0	0	2	1	

Daraus folgt: $x_3 = 0{,}5;\quad x_2 = 0{,}4;\quad x_1 = 0{,}1$

Langfristig sind $10\,\%$ der Strände zum Baden ungeeignet.

Lösung A1/2018

1.1 *Übergangsdiagramm*



Anzahl der Zuschauertypen am zweiten Heimspieltag, wenn man bei der Simulation annimmt, dass am ersten Heimspieltag alle Zuschauer zu Fuß bzw. dem Fahrrad kommen.

Übergangsmatrix: $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

Anfangsverteilung: $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50000 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{M} \cdot \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 5000 \\ 40000 \end{pmatrix}$$

Nach dem Modell kommen beim zweiten Heimspieltag jeweils 5000 Zuschauer mit dem Auto bzw. Bus und Bahn und 40.000 wiederum zu Fuß bzw. mit dem Fahrrad.

1.2 *Prozentualen Anteile der verschiedenen Zuschauertypen, sodass sich diese Anteile an zwei aufeinander folgenden Heimspieltagen nicht verändern:*

Berechnung des Stabilitätsvektors:

$$\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix}$$

Dies führt zu nachfolgendem LGS:

(1) $0{,}75x + 0{,}2y + 0{,}1 \cdot (1-x-y) = x$
(2) $0{,}25x + 0{,}75y + 0{,}1 \cdot (1-x-y) = y$
(3) $0 \cdot x + 0{,}05y + 0{,}8 \cdot (1-x-y) = 1-x-y$

(1) $-0{,}35x + 0{,}1y = -0{,}1$ | $\cdot 20$
(2) $0{,}15x - 0{,}35y = -0{,}1$ | $\cdot 20$
(3) $0{,}2x + 0{,}25y = 0{,}2$ | $\cdot 20$

(1) $-7x + 2y = -2$
(2) $3x - 7y = -2$ | $3 \cdot (1) + 7 \cdot (2)$
(3) $4x + 5y = 4$ | $4 \cdot (1) + 7 \cdot (3)$

(1) $-7x + 2y = -2$
(2) $0 \quad - 43y = -20$
(3) $0x \quad + 43y = 20$

Aus (2) bzw. (3) folgt:

$y = \frac{20}{43} \approx 0{,}465$

(1) $-7x + 2 \cdot \frac{20}{43} = -2$
$7x = \frac{126}{43}$
$x = \frac{18}{43} \approx 0{,}419$

Daraus dritter Eintrag des Stabilitätsvektors:

$1 - x - y = 1 - \frac{18}{43} - \frac{20}{43} = \frac{5}{43} \approx 0{,}116$

Mit dem Auto kommen etwa $41{,}9\,\%$*, mit dem Bus bzw. der Bahn etwa* $46{,}5\,\%$ *und zu Fuß bzw. mit dem Fahrrad etwa* $11{,}6\,\%$ *der Zuschauer.*

1.3.1 8.000 *Parkplätze am dritten Heimspieltag nicht ausreichend:*

Am zweiten Heimspieltag sind es
27.000 Zuschauer vom Typ B
3.000 Zuschauer vom Typ F
$50.000 - 27.000 - 3.000 = 20.000$ Zuschauer vom Typ A.

Verteilungsvektor am zweiten Heimspieltag: $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 20000 \\ 27000 \\ 3000 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{x_3} = \boldsymbol{M} \cdot \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20000 \\ 27000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20700 \\ 25550 \\ 3750 \end{pmatrix}$$

Am dritten Heimspieltag ist mit 20700 Zuschauern zu rechnen, die mit dem Auto kommen.

Dies entspricht $\frac{20700}{2{,}5} = 8280$ Parkplätzen.

Die Anzahl der benötigten Parkplätze ist 8280 und damit größer als 8000.

1.3.2 *Veränderter Prozentsatz von Zuschauern vom Typ A, die wieder mit dem Auto kommen:*

8000 Parkplätze reichen aus, wenn $2{,}5 \cdot 8.000 = 20.000$ Zuschauer mit dem Auto kommen.

$$\overrightarrow{x_3} = \boldsymbol{M} \cdot \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} a & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20000 \\ 27000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Somit muss gelten:

$20000 \cdot a + 27000 \cdot 0{,}2 + 3000 \cdot 0{,}1 = 20000$

$20000 \cdot a = 14300$

$a = \frac{14300}{20000} = 0{,}715$

71,5% der Zuschauer, die am zweiten Heimspieltag mit dem Auto gekommen waren, kommen dann am dritten Heimspieltag wieder mit dem Auto.