Abituraufgaben Matrizen und Prozesse *(Teil 4 mit Hilfsmittel)* *ab 2017*

Lösung A1/2017

1.1.1 Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 2+a \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

De Ergebnismatrix stimmt mit $\boldsymbol{C}$ überein, wenn $a = 2$ ist.

1.2.1.1 Der Produktionsvektor ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Erforderliche Rohstoffmenge: $\boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 50 \end{pmatrix}$

Die Behauptung des Mitarbeiters stimmt.

1.2.1.2 Prüfung, ob $\boldsymbol{D}_1$ die Inverse von $\boldsymbol{C}$ ist:

$\boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{D}_1$ kann nicht die Inverse sein, da der Eintrag oben links eine „1“ ergeben müsste.

Prüfung, ob $\boldsymbol{D}_2$ die Inverse von $\boldsymbol{C}$ ist:

$\boldsymbol{D}_2 \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{D}_2$ kann nicht die Inverse sein, da der Eintrag oben links eine „1“ ergeben müsste.

Prüfung, ob $\boldsymbol{D}_3$ die Inverse von $\boldsymbol{C}$ ist:

$\boldsymbol{D}_3 \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{D}_3$ ist die Inverse von $\boldsymbol{C}$, da als Ergebnis die Einheitsmatrix entsteht.

Der Rohstoffvektor ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} 43 \\ 33 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist der Produktionsvektor $\vec{p}$.

$\boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \vec{r} \implies \vec{p} = \boldsymbol{C}^{-1} \cdot \vec{r} = \boldsymbol{D}_3 \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Von E1 wurden 3 ME und von E2 wurden 7 ME produziert.

1.2 Übergangsmatrix: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

Bedingung für stationäre Verteilung:

$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sowie $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

	x_1	x_2	x_3	$=$	
(1)	$-0{,}2$	$+0{,}05$		0	
(2)	$0{,}2$	$-0{,}3$	$+0{,}2$	0	(1)+(2)
(3)	0	$0{,}25$	$-0{,}2$	0	
(4)	1	1	1	1	$5\cdot$(1)+(4)

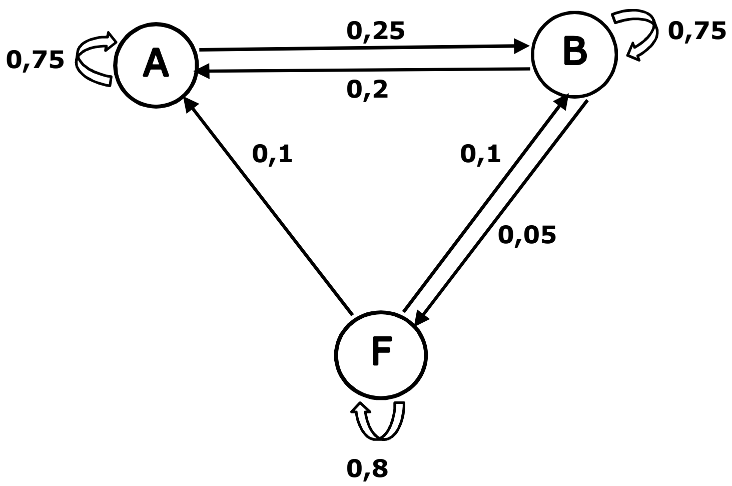
	x_1	x_2	x_3	$=$	
(1)	$-0{,}2$	$+0{,}05$		0	
(2)	0	$-0{,}25$	$+0{,}2$	0	
(3)	0	$0{,}25$	$-0{,}2$	0	(2)+(3)
(4)	0	$1{,}25$	1	1	$5\cdot$(2)+(4)

	x_1	x_2	x_3	$=$	
(1)	$-0{,}2$	$+0{,}05$		0	
(2)	0	$-0{,}25$	$+0{,}2$	0	
(3)	0	0	0	0	
(4)	0	0	2	1	

Daraus folgt: $x_3 = 0{,}5; \quad x_2 = 0{,}4; \quad x_1 = 0{,}1$
Langfristig sind $10\,\%$ *der Strände zum Baden ungeeignet.*

Lösung A1/2018

1.1 *Übergangsdiagramm*



Anzahl der Zuschauertypen am zweiten Heimspieltag, wenn man bei der Simulation annimmt, dass am ersten Heimspieltag alle Zuschauer zu Fuß bzw. dem Fahrrad kommen.

Übergangsmatrix: $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

Anfangsverteilung: $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50000 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{M} \cdot \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,2 & 0,1 \\ 0,25 & 0,75 & 0,1 \\ 0 & 0,05 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 5000 \\ 40000 \end{pmatrix}$$

Nach dem Modell kommen beim zweiten Heimspieltag jeweils 5000 Zuschauer mit dem Auto bzw. Bus und Bahn und 40.000 wiederum zu Fuß bzw. mit dem Fahrrad.

1.2 *Prozentualen Anteile der verschiedenen Zuschauertypen, sodass sich diese Anteile an zwei aufeinander folgenden Heimspieltagen nicht verändern:*

Berechnung des Stabilitätsvektors:

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,2 & 0,1 \\ 0,25 & 0,75 & 0,1 \\ 0 & 0,05 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix}$$

Dies führt zu nachfolgendem LGS:

(1) $0,75x + 0,2y + 0,1 \cdot (1-x-y) = x$
(2) $0,25x + 0,75y + 0,1 \cdot (1-x-y) = y$
(3) $0 \cdot x + 0,05y + 0,8 \cdot (1-x-y) = 1-x-y$

(1) $-0,35x + 0,1y = -0,1 \quad | \quad \cdot 20$
(2) $0,15x - 0,35y = -0,1 \quad | \quad \cdot 20$
(3) $0,2x + 0,25y = 0,2 \quad | \quad \cdot 20$

(1) $-7x + 2y = -2$
(2) $3x - 7y = -2 \quad | \quad 3 \cdot (1) + 7 \cdot (2)$
(3) $4x + 5y = 4 \quad | \quad 4 \cdot (1) + 7 \cdot (3)$

(1) $-7x + 2y = -2$
(2) $0 \quad - 43y = -20$
(3) $0x \quad + 43y = 20$

Aus (2) bzw. (3) folgt:

$y = \frac{20}{43} \approx 0,465$

(1) $-7x + 2 \cdot \frac{20}{43} = -2$
$7x = \frac{126}{43}$
$x = \frac{18}{43} \approx 0,419$

Daraus dritter Eintrag des Stabilitätsvektors:

$1 - x - y = 1 - \frac{18}{43} - \frac{20}{43} = \frac{5}{43} \approx 0,116$

Mit dem Auto kommen etwa $41,9\ \%$, *mit dem Bus bzw. der Bahn etwa* $46,5\ \%$ *und zu Fuß bzw. mit dem Fahrrad etwa* $11,6\ \%$ *der Zuschauer.*

1.3.1 8.000 *Parkplätze am dritten Heimspieltag nicht ausreichend:*

Am zweiten Heimspieltag sind es

27.000 Zuschauer vom Typ B
3.000 Zuschauer vom Typ F
$50.000 - 27.000 - 3.000 = 20.000$ Zuschauer vom Typ A.

Verteilungsvektor am zweiten Heimspieltag: $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 20000 \\ 27000 \\ 3000 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{x_3} = \boldsymbol{M} \cdot \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20000 \\ 27000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20700 \\ 25550 \\ 3750 \end{pmatrix}$$

Am dritten Heimspieltag ist mit 20700 Zuschauern zu rechnen, die mit dem Auto kommen.

Dies entspricht $\frac{20700}{2{,}5} = 8280$ Parkplätzen.

Die Anzahl der benötigten Parkplätze ist 8280 und damit größer als 8000.

1.3.2 *Veränderter Prozentsatz von Zuschauern vom Typ A, die wieder mit dem Auto kommen:*

8000 Parkplätze reichen aus, wenn $2{,}5 \cdot 8.000 = 20.000$ Zuschauer mit dem Auto kommen.

$$\overrightarrow{x_3} = \boldsymbol{M} \cdot \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} a & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}75 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20000 \\ 27000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Somit muss gelten:

$20000 \cdot a + 27000 \cdot 0{,}2 + 3000 \cdot 0{,}1 = 20000$

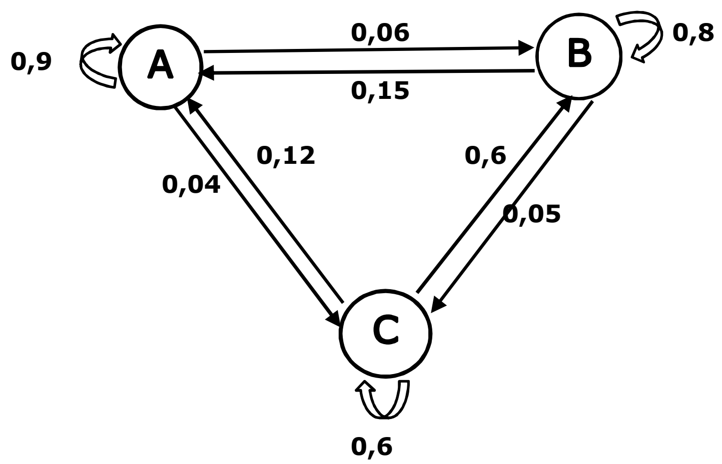
$20000 \cdot a = 14300$

$a = \frac{14300}{20000} = 0{,}715$

71,5% der Zuschauer, die am zweiten Heimspieltag mit dem Auto gekommen waren, kommen dann am dritten Heimspieltag wieder mit dem Auto.

Lösung A1/2019

1.1 *Übergangsdiagramm*



Interpretation von $0{,}04$:

Das Skigebiet A verliert jährlich $4\,\%$ seiner Gäste an Skigebiet C.

1.2 *Jeweilige Anzahl der Gäste im Folgejahr:*

Von den 200000 Gästen verbringen $0{,}6 \cdot 200000 = 120000$ Gäste den Urlaub in A, $0{,}3 \cdot 200000 = 60000$ in B und $0{,}1 \cdot 200000 = 20000$ in C.

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}06 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120000 \\ 60000 \\ 20000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121000 \\ 59200 \\ 19800 \end{pmatrix}$$

Im folgenden Jahr sind 121000 Gäste in A, 59200 in B und 19800 in C.

Skigebiet mit dem der größten prozentualen Unterschied im Folgejahr:
Prozentuale Änderungen:
A: $\frac{+1000}{120000} = +0{,}0083 = +0{,}83\%$ B: $\frac{-800}{60000} = -0{,}013 = -1{,}3\%$
C: $\frac{-200}{20000} = -0{,}01 = -1{,}0\%$
Das Skigebiet B hat den größten prozentualen Unterschied.

1.3 *Anzahl der Gäste von Skigebiet A, B und C im Jahr 2020:*

Vektor für die Anzahl der Gäste im Jahr 2020 ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} b+c \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Anzahl der Gäste im Jahr 2021:

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}06 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b+c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ 0{,}06(b+c) + 0{,}8b + 0{,}2c \\ \dots \end{pmatrix}$$

Nach Aufgabestellung gilt:
(1) $b + c + b + c = 200000$
Aus der Matrix folgt:
(2) $0{,}06(b+c) + 0{,}8b + 0{,}2c = 63500$
(1) $2b + 2c = 200000$
(2) $0{,}86b + 0{,}26c = 63500$
(1) $b = 100000 - c$
$b \rightarrow (2)$
(2) $0{,}86(100000 - c) + 0{,}26c = 63500$
$c = 37500$
$c \rightarrow (1)$
$b = 62500$
Im Jahr 2020 hat B 62.500 Gäste, C 37.500 Gäste und A 100.000 Gäste.

1.4 *Von Jahr zu Jahr gleich bleibende prozentuale Gästeverteilung:*

Bedingung für stationäre Verteilung: $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 & 0{,}12 \\ 0{,}06 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix}$$

Zeile 1: $0{,}9a + 0{,}15b + 0{,}12(1-a-b) = a$ ==> $-0{,}3a - 0{,}05b = -0{,}2$
Zeile 2: $0{,}06a + 0{,}8b + 0{,}2(1-a-b) = b$ ==> $-0{,}14a - 0{,}4b = -0{,}2$
Zeile 3: $0{,}04a + 0{,}05b + 0{,}6(1-a-b) = 1-a-b$ ==> $0{,}44a + 0{,}45b = 0{,}4$

Aus Zeile 1 folgt: $-0{,}05b = -0{,}2 + 0{,}3a$ ==> $b = 4 - 6a$
$b \rightarrow$ Zeile 2:
$-0{,}14a - 0{,}4(4-6a)b = -0{,}2$ ==> $2{,}26a = 1{,}4$ ==> $a = \frac{70}{113} \approx 0{,}62$
$a \rightarrow$ Zeile 1:
$b = 4 - 6 \cdot \frac{70}{113} = \frac{32}{113} \approx 0{,}28$
$a; b \rightarrow$ Zeile 3:
$0{,}44 \cdot 0{,}62 + 0{,}45 \cdot 0{,}25 \overset{?}{=} 0{,}4$
$0{,}4 = 0{,}4$ ==> wahre Aussage
Prozentuale Gästeverteilung: A: 62 %, B: 28 %, A: 10 %.