Abituraufgaben Matrizen und Prozesse *(Teil 4)* ab 2020-2021

Aufgabe A1/2020

1 Eine Nudelmanufaktur stellt aus Wasser, Grieß und Spinat weiße und grüne Nudeln her, die in zwei verschiedenen Packungen „Pur" und „Mix" angeboten werden.
Die folgenden Tabellen zeigen die verwendeten Mengen in Kilogramm (kg). Dabei geht man davon aus, dass 1 Liter (l) Wasser einem kg entspricht.

	grüne Nudeln	weiße Nudeln
Wasser	$0{,}2$	b
Grieß	a	$0{,}8$
Spinat	$0{,}3$	0

	„Pur"	„Mix"
Grüne Nudeln	$0{,}5$	c
Weiße Nudeln	0	c

	„Pur"	„Mix"
Wasser	$0{,}1$	$0{,}1$
Grieß	$0{,}25$	$0{,}325$
Spinat	$0{,}15$	$0{,}075$

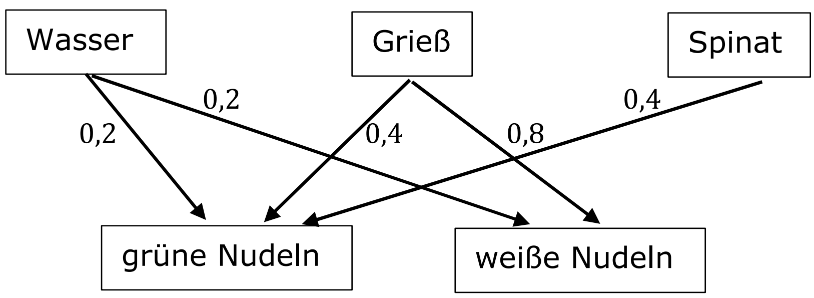
1.1 Berechnen Sie den jeweiligen Wert für a, b und c. (3P)

1. 2 Ein Auftrag besteht aus 2000 Packungen „Pur" und 1000 Packungen „Mix".

1.2.1 Bestimmen Sie jeweils, wie viel kg Grieß bzw. Spinat für den Auftrag benötigt werden. (2 P)

1.2.2 Die auf den Auftrag bezogenen Fixkosten betragen 200 Euro. Die variablen Herstellkosten pro Packung „Pur" betragen 50 Cent (ct), pro Packung „Mix" $40\,ct$.
Der Preis pro Packung „Pur" soll $50\,\%$ höher sein, als der Preis für „Mix".
Bestimmen Sie jeweils den Preis für eine Packung „Pur" bzw. „Mix", sodass der Verkaufserlös um $25\,\%$ höher ist als die Gesamtkosten. (4P)

1.3 Durch eine neue Rezeptur verändert sich der Bedarf für die Herstellung der beiden Nudelsorten wie folgt:



Im Lager befinden sich $2000\,kg$ Grieß, die vollständig nach der neuen Rezeptur verarbeitet werden soll. Mindestens $40\,\%$ der hergestellten Nudeln sollen dabei grün sein.
Ermitteln Sie alle möglichen Wassermengen, die hierbei verbraucht werden. (6P)

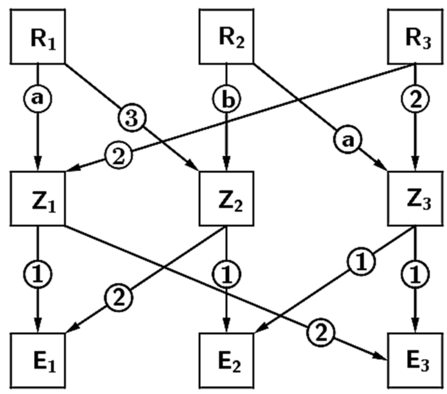
Aufgabe A1/2021

1. Ein Betrieb produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3. Daraus werden in einem zweiten Schritt die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt.
Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) wird durch die nachfolgende Tabelle sowie das Verflechtungsdiagramm beschrieben.

Tabelle:

	E_1	E_2	E_3
R_1	7	5	2
R_2	6	4	1
R_3	2	6	6

Verpflechtungsdiagramm:



Powered by GEOGEBRA.org

1.1 Interpretieren Sie den Wert 5 in der Tabelle und berechnen Sie, wie viele ME der Rohstoffe benötigt werden, um jeweils $10\,ME$ der Endprodukte zu produzieren. (3P)

1.2 Ermitteln Sie die Werte von a und b im Verflechtungsdiagramm. (4P)

1.3 Um einen reibungslosen Produktionsablauf zu gewährleisten, muss im Lager ein Mindestbestand an Rohstoffen von jeweils $50\,ME$ vorhanden sein. Von R_1 sind noch $345\,ME$, von R_2 noch $285\,ME$ und von R_3 noch $330\,ME$ im Lager.
Es sollen nun $25\,ME$ von E_2 hergestellt werden.
Ermitteln Sie die hergestellten Mengen von E_1 und E_3, falls der Lagerbestand an Rohstoffen bis auf den Mindestbestand vollständig verarbeitet werden soll. (4 P)

1.4 Ein Kunde erteilt einen Auftrag über $10\,ME$ von E_1 und jeweils $20\,ME$ von E_2 und E_3. Die variablen Herstellungskosten in € pro ME der Endprodukte sind durch $\overrightarrow{k_V} = (30 \;\; 15 \;\; 45)$ gegeben. Die Fixkosten betragen 500 Euro.
Berechnen Sie, wie hoch die Verkaufspreise der einzelnen Endprodukte sein müssen, damit der Gewinn $10\,\%$ der Gesamtkosten beträgt und die Preise im selben Verhältnis wie die variablen Herstellungskosten stehen. (4P)

Abituraufgaben Matrizen und Prozesse (Teil 4) ab 2020-2021

Aufgabe A2/2021

2. Drei verschiedene Fitnessketten A, B und C konkurrieren in einer Region um die insgesamt 10.000 Kunden. Die Kunden sind entweder ohne Vertrag oder sie sind Mitglied bei genau einer Fitnesskette für ein Jahr angemeldet. Jedes Jahr melden sich einige Kunden ohne Vertrag neu an, manche Mitglieder wechseln die Fitnesskette, manche bleiben bei ihrer Fitnesskette, einige scheiden aus und sind dann ohne Vertrag. Die Entwicklung von einem Jahr zum nächsten lässt sich modellhaft durch die Gleichung $M \cdot \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_{n+1}}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ O \end{pmatrix}$$

beschreiben. Hierbei wird die Anzahl der Mitglieder der Fitnessketten ebenfalls mit A, B und C bezeichnet. O ist die Anzahl der Kunden ohne Vertrag.

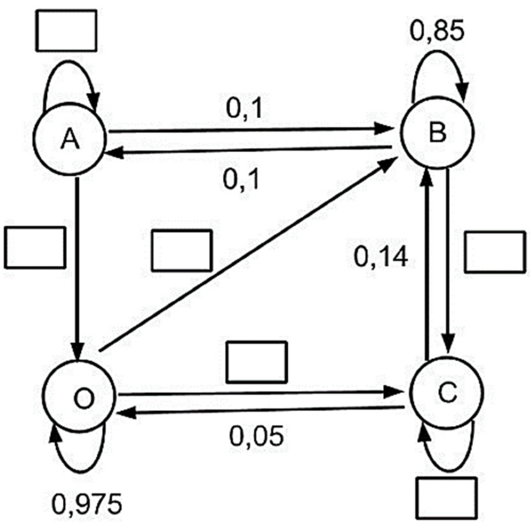
2.1 Vervollständigen Sie den Übergangsgraphen der unten stehenden Grafik. (3P)

2.2 Interpretieren Sie den Eintrag $0{,}14$ im Sachzusammenhang.
Nennen Sie die Fitnesskette, zu der ausschließlich Kunden kommen, die schon zuvor bei einer Kette angemeldet waren. (2P)

2.3 Im Jahr 2020 waren jeweils 1400 Mitglieder in den drei Ketten angemeldet. Bestimmen Sie die Anzahl der Mitglieder der drei Ketten im Jahr 2021. (3P)

2.4 Langfristig werden $10\,\%$ der Kunden bei der Fitnesskette A angemeldet sein und $60\,\%$ der Kunden ohne Vertrag bleiben.
Ermitteln Sie die Verteilung aller Kunden, die von einem Jahr auf das nächste unverändert bleiben. (3P)

2.5 In einem Jahr hat die Fitnesskette A die doppelte Anzahl von Mitgliedern, wie jede der beiden anderen Ketten. Außerdem hat die Fitnesskette C dann ein Jahr später 950 Mitglieder.
Ermitteln Sie die prozentuale Zunahme der Kunden ohne Vertrag. (4P)



Abituraufgaben Matrizen und Prozesse (Teil 4) 2020-2021

Lösung A1/2020

1.1 Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & b \\ a & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0 \end{pmatrix}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & c \\ 0 & c \end{pmatrix}$

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}325 \\ 0{,}15 & 0{,}075 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & b \\ a & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & c \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2c + bc \\ 0{,}5a & ac + 0{,}8c \\ 0{,}15 & 0{,}3c \end{pmatrix}$

Vergleich des Ergebnisses mit Matrix $\boldsymbol{C}$:

$0{,}5a = 0{,}25$ ➔ $a = 0{,}5$

$0{,}3c = 0{,}075$ ➔ $c = 0{,}25$

$0{,}2c + bc = 0{,}1$

$0{,}2 \cdot 0{,}25 + 0{,}25b = 0{,}1$

$0{,}25b = 0{,}1 - 0{,}05$ ➔ $b = 0{,}2$

1.2.1 Der Produktionsvektor ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}$

Erforderliche Rohstoffmenge: $\vec{r} = \boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}325 \\ 0{,}15 & 0{,}075 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 825 \\ 375 \end{pmatrix}$

Für den Auftrag werden 825 *kg Grieß und* 375 *kg Spinat benötigt.*

1.2. 2 Variabler Herstellkostenvektor: $\overrightarrow{k_V} = (0{,}5 \quad 0{,}4)$

Kosten des Auftrags: $K = \overrightarrow{k_V} \cdot \vec{p} + 200 = (0{,}5 \quad 0{,}4) \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} + 200 = 1600$ €.

Der Verkaufserlös soll $1600 \cdot 1{,}25 = 2000$ Euro betragen.

Preis für Packung „Mix" sei p

Preis für Packung „Pur" $= 1{,}5p$

Bedingung: $1000 \cdot p + 2000 \cdot 1{,}5p = 4000p$

$4000p = 2000$ ➔ $p = 0{,}5$

Der Preis für eine Packung „Mix" beträgt $0{,}50$ €

Der Preis für eine Packung „Pur" beträgt $0{,}75$ €.

1.3 Neue Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$

Rohstoffvektor: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 2000 \\ r_3 \end{pmatrix}$

Zwischenproduktvektor: $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$r_1 =$ Menge des Wassers

$r_3 =$ Menge des Spinats

$z_1 =$ Menge der grünen Nudeln

$z_2 =$ Menge der weißen Nudeln

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 2000 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

(I) $0{,}2z_1 + 0{,}2z_2 = r_1$
(II) $0{,}4z_1 + 0{,}8z_2 = 2000$
(III) $0{,}4z_1 = r_3$

Aus (II) folgt:
(II) $z_2 = 2500 - 0{,}5z_1$
Da $z_2 \geq 0$ gelten muss, folgt aus (III):
$z_1 \leq 5000$
Es können maximal $5000\ kg$ grüne Nudeln hergestellt werden.

Mindestens $40\ \%$ der Nudeln sollen grün sein:
$z_1 \geq 0{,}4 \cdot (z_1 + z_2)$ ➔ $0{,}6z_1 \geq 0{,}4z_2$
$z_1 \geq \frac{2}{3}z_2$
Es müssen mindestens $z_1 = \frac{2}{3}z_2$ grüne Nudeln hergestellt werden.
Eingesetzt in obige (II):
$z_2 = 2500 - 0{,}5 \cdot \frac{2}{3}z_2$
$\frac{4}{3}z_2 = 2500$
$z_2 = 1875$
Daraus folgt:
$z_1 = \frac{2}{3}z_2 = \frac{2}{3} \cdot 1875 = 1250$
Es müssen mindestens $1250\ kg$ grüne Nudeln hergestellt werden.
(II) => (I)
$0{,}2z_1 + 0{,}2 \cdot (2500 - 0{,}5z_1) = r_1$
$500 + 0{,}1z_1 = r_1$
Mit $z_1 = 1250$ (Mindestmenge) folgt $r_1 = 625$
Mit $z_2 = 5000$ (Maximalmenge) folgt $r_1 = 1000$
Es werden zwischen 625 Liter und 1000 Liter Wasser verbraucht.

Lösung A1/2021

1.1 Der Wert 5 gibt an, dass für die Herstellung von 1 Mengeneinheit des Endprodukts E_2 5 Mengeneinheiten des Rohstoffes R_1 benötigt werden.

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Gegeben ist der Endprodukt-Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

Berechnung des Rohstoffvektors $\vec{r} = \boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 110 \\ 140 \end{pmatrix}$

Es werden $140\ ME$ von R_1, $110\ ME$ von R_2 sowie $140\ ME$ von R_3 benötigt.

1.2 Aus dem Verflechtungsdiagramm ergibt sich die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A}$ und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & a \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & a \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6+a & 2a+3 & 2a \\ 2b & b+a & a \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6+a & 2a+3 & 2a \\ 2b & b+a & a \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$6+a=7 \quad \Rightarrow \quad a=1$

$2b=6 \quad \Rightarrow \quad b=3$

Der Vergleich der Matrizen ergibt $a=1$ und $b=3$.

1.3 Gegeben ist der Rohstoffvektor $\vec{r}=\begin{pmatrix} 345-50 \\ 285-50 \\ 330-50 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 295 \\ 235 \\ 280 \end{pmatrix}$ und der Produktionsvektor $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ 25 \\ y \end{pmatrix}$.

Bedingung: $\vec{r}=\boldsymbol{C}\cdot\vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 295 \\ 235 \\ 280 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ 25 \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7x+125+2y \\ 6x+100+y \\ 2x+150+6y \end{pmatrix}$$

Aus Zeile 2 folgt:

$6x+100+y=235$

$y=135-6x$

$y\rightarrow$ Zeile 1:

$7x+125+2\cdot(135-6x)=295$

$-5x+395=295$

$5x=395-295=100$

$x=20$

$x\rightarrow y$

$y=135-6\cdot 20=15$

Probe:

$x;y\rightarrow$ Zeile 3:

$2\cdot 20+150+6\cdot 15 \overset{?}{=} 280$

$280=280$

Es werden $20\,ME$ von E_1 und $15\,ME$ von E_3 hergestellt.

1.4 Gegeben:

variabler Kostenvektor $\overrightarrow{k_V}=(30\ \ 15\ \ 45)$; Produktionsvektor $\vec{p}=\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Berechnung der Gesamtkosten:

$K=\overrightarrow{k_V}\cdot\vec{p}+500=300+300+900+500=2000\ €$

Der Erlös soll $2000\cdot 1{,}1=2200\ €$ betragen.

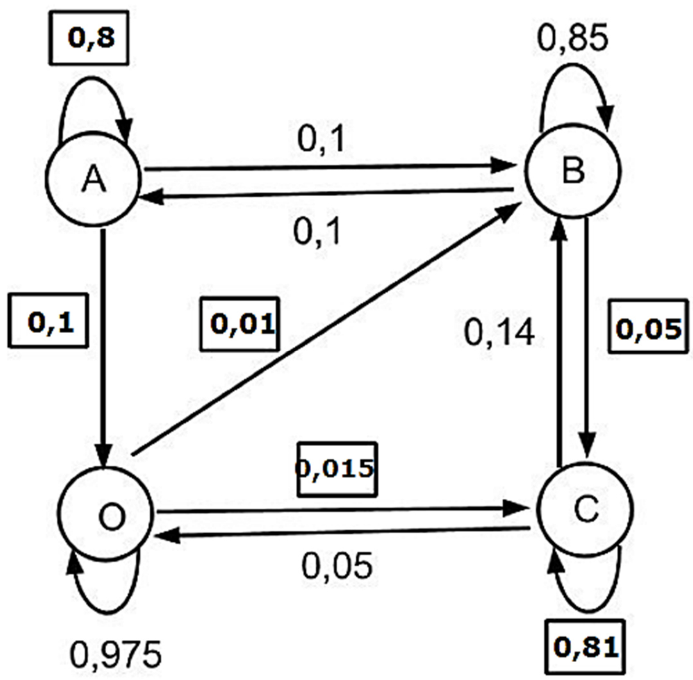
Der Erlösvektor sei $\vec{u} = (u_1 \;\; u_2 \;\; u_3)$
Das Verhältnis der variablen Herstellkosten der Endprodukte beträgt $30:15:45 = 2:1:3$
Damit kann der Verkaufsvektor dargestellt werden durch:
$\vec{u} = (2u_2 \;\; u_2 \;\; 3u_2)$
Nun muss gelten: $\vec{u} \cdot \vec{p} = 2200$

$$(2u_2 \;\; u_2 \;\; 3u_2) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = 100u_2$$

$100u_2 = 2200$ ➔ $u_2 = 22$ €
Der Verkaufspreisvektor lautet $\vec{u} = (44 \;\; 22 \;\; 66)$
Verkaufspreis von E_1 ist 44 €; Verkaufspreis von E_2 ist 22 €; Verkaufspreis von E_3 ist 66 €.

Lösung A2/2021

2.1



Die Befüllung der freien Felder erfolgte anhand der Einträge in der Matrix $\boldsymbol{M}$.

2.2 Interpretation des Wertes $0{,}14$:
$14\,\%$ der Mitglieder der Fitnesskette C wechseln innerhalb eines Jahres in die Fitnesskette B.

Zur Fitnesskette A kommen ausschließlich Kunden, die zuvor schon bei einer Kette angemeldet waren. Dies ist daran erkennbar, dass von O aus kein Pfeil zu A verläuft.

2.3 Anzahl der Mitglieder im Jahr 2021:
In den Ketten A, B, C sind im Jahr 2020 jeweils 1400 Mitglieder.
Ohne Mitgliedschaft sind $10000 - 3 \cdot 1400 = 5800$ Kunden.

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1400 \\ 1400 \\ 1400 \\ 5800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1260 \\ 1584 \\ 1291 \\ 5865 \end{pmatrix}$$

Im Jahr 2021 sind in A 1260 Mitglieder, in B 1584 Mitglieder und in C 1221 Mitglieder.

2.4 Gegeben ist der Verteilungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ b \\ 0{,}3 - b \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Bedingung: $\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ b \\ 0{,}3 - b \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ b \\ 0{,}3 - b \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$$

1. Zeile mal 1. Spalte:
$0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot b + 0 + 0 = 0{,}1$
$0{,}08 + 0{,}1b = 0{,}1$
$0{,}1b = 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}2$
Die anderen Zeilen liefern für $b = 0{,}2$ ebenfalls wahre Aussagen.
Für die 10000 Kunden lautet die stabile Verteilung:

$$\vec{v} = 10000 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 02 \\ 0{,}1 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

2.5 Die Ausgangsverteilung lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x \\ 10000 - 4x \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x \\ 1000 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 0{,}05x + 0{,}81x + 150 - 0{,}06x \\ 0{,}2x + 0{,}05x + 9750 - 3{,}9x \end{pmatrix}$$

Es soll gelten: $0{,}05x + 0{,}81x + 150 - 0{,}06x = 950 \quad \Rightarrow \quad x = 1000$
Anzahl Kunden ohne Vertrag vorher: $10000 - 4 \cdot 1000 = 6000$
Anzahl Kunden ohne Vertrag nachher: $200 + 50 + 9750 - 3900 = 6100$
Die Anzahl der Kunden ohne Vertrag hat um $\frac{100}{6000} \approx 0{,}017$, also um ca. $1{,}7\ \%$ zugenommen.