Abituraufgaben Matrizen und Prozesse *(Teil 4)* 2020-2021

Lösung A1/2020

1.1 Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0{,}2 & b\\ a & 0{,}8\\ 0{,}3 & 0\end{pmatrix}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0{,}5 & c\\ 0 & c\end{pmatrix}$

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}1\\ 0{,}25 & 0{,}325\\ 0{,}15 & 0{,}075\end{pmatrix}$

Es gilt: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0{,}2 & b\\ a & 0{,}8\\ 0{,}3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}5 & c\\ 0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}2c+bc\\ 0{,}5a & ac+0{,}8c\\ 0{,}15 & 0{,}3c\end{pmatrix}$

Vergleich des Ergebnisses mit Matrix $\boldsymbol{C}$:

$0{,}5a=0{,}25 \Rightarrow a=0{,}5$

$0{,}3c=0{,}075 \Rightarrow c=0{,}25$

$0{,}2c+bc=0{,}1$

$0{,}2\cdot 0{,}25+0{,}25b=0{,}1$

$0{,}25b=0{,}1-0{,}05 \Rightarrow b=0{,}2$

1.2.1 Der Produktionsvektor ist $\vec{p}=\begin{pmatrix}2000\\ 1000\end{pmatrix}$

Erforderliche Rohstoffmenge: $\vec{r}=\boldsymbol{C}\cdot\vec{p}=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}1\\ 0{,}25 & 0{,}325\\ 0{,}15 & 0{,}075\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2000\\ 1000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}300\\ 825\\ 375\end{pmatrix}$

Für den Auftrag werden 825 kg Grieß und 375 kg Spinat benötigt.

1.2. 2 Variabler Herstellkostenvektor: $\overrightarrow{k_V}=(0{,}5 \quad 0{,}4)$

Kosten des Auftrags: $K=\overrightarrow{k_V}\cdot\vec{p}+200=(0{,}5 \quad 0{,}4)\cdot\begin{pmatrix}2000\\ 1000\end{pmatrix}+200=1600$ €.

Der Verkaufserlös soll $1600\cdot 1{,}25=2000$ Euro betragen.

Preis für Packung „Mix" sei p

Preis für Packung „Pur" $=1{,}5p$

Bedingung: $1000\cdot p+2000\cdot 1{,}5p=4000p$

$4000p=2000 \Rightarrow p=0{,}5$

Der Preis für eine Packung „Mix" beträgt $0{,}50$ €

Der Preis für eine Packung „Pur" beträgt $0{,}75$ €.

1.3 Neue Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}8\\ 0{,}4 & 0\end{pmatrix}$

Rohstoffvektor: $\vec{r}=\begin{pmatrix}r_1\\ 2000\\ r_3\end{pmatrix}$

Zwischenproduktvektor: $\vec{z}=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$

$r_1=$ Menge des Wassers

$r_3=$ Menge des Spinats

$z_1=$ Menge der grünen Nudeln

$z_2=$ Menge der weißen Nudeln

$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 2000 \\ r_3 \end{pmatrix}$

(I) $0{,}2z_1 + 0{,}2z_2 = r_1$

(II) $0{,}4z_1 + 0{,}8z_2 = 2000$

(III) $0{,}4z_1 = r_3$

Aus (II) folgt:

(II) $z_2 = 2500 - 0{,}5z_1$

Da $z_2 \geq 0$ gelten muss, folgt aus (III):

$z_1 \leq 5000$

Es können maximal $5000\ kg$ grüne Nudeln hergestellt werden.

Mindestens $40\ \%$ der Nudeln sollen grün sein:

$z_1 \geq 0{,}4 \cdot (z_1 + z_2)$ ➔ $0{,}6z_1 \geq 0{,}4z_2$

$z_1 \geq \frac{2}{3}z_2$

Es müssen mindestens $z_1 = \frac{2}{3}z_2$ grüne Nudeln hergestellt werden.

Eingesetzt in obige (II):

$z_2 = 2500 - 0{,}5 \cdot \frac{2}{3}z_2$

$\frac{4}{3}z_2 = 2500$

$z_2 = 1875$

Daraus folgt:

$z_1 = \frac{2}{3}z_2 = \frac{2}{3} \cdot 1875 = 1250$

Es müssen mindestens $1250\ kg$ grüne Nudeln hergestellt werden.

(II) => (I)

$0{,}2z_1 + 0{,}2 \cdot (2500 - 0{,}5z_1) = r_1$

$500 + 0{,}1z_1 = r_1$

Mit $z_1 = 1250$ (Mindestmenge) folgt $r_1 = 625$

Mit $z_2 = 5000$ (Maximalmenge) folgt $r_1 = 1000$

Es werden zwischen 625 Liter und 1000 Liter Wasser verbraucht.

Lösung A1/2021

1.1 Der Wert 5 gibt an, dass für die Herstellung von 1 Mengeneinheit des Endprodukts E_2 5 Mengeneinheiten des Rohstoffes R_1 benötigt werden.

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Gegeben ist der Endprodukt-Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

Berechnung des Rohstoffvektors $\vec{r} = \boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 110 \\ 140 \end{pmatrix}$

Es werden $140\ ME$ von R_1, $110\ ME$ von R_2 sowie $140\ ME$ von R_3 benötigt.

1.2 Aus dem Verflechtungsdiagramm ergibt sich die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A}$ und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & a \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & a \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+a & 2a+3 & 2a \\ 2b & b+a & a \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6+a & 2a+3 & 2a \\ 2b & b+a & a \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$6 + a = 7 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

$2b = 6 \quad \Rightarrow \quad b = 3$

Der Vergleich der Matrizen ergibt $a = 1$ und $b = 3$.

1.3 Gegeben ist der Rohstoffvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 345-50 \\ 285-50 \\ 330-50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 295 \\ 235 \\ 280 \end{pmatrix}$ und der Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 25 \\ y \end{pmatrix}$.

Bedingung: $\vec{r} = \boldsymbol{C} \cdot \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 295 \\ 235 \\ 280 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 25 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x+125+2y \\ 6x+100+y \\ 2x+150+6y \end{pmatrix}$$

Aus Zeile 2 folgt:

$6x + 100 + y = 235$

$y = 135 - 6x$

$y \rightarrow$ Zeile 1:

$7x + 125 + 2 \cdot (135 - 6x) = 295$

$-5x + 395 = 295$

$5x = 395 - 295 = 100$

$x = 20$

$x \rightarrow y$

$y = 135 - 6 \cdot 20 = 15$

Probe:

$x; y \rightarrow$ Zeile 3:

$2 \cdot 20 + 150 + 6 \cdot 15 \stackrel{?}{=} 280$

$280 = 280$

Es werden $20\,ME$ von E_1 und $15\,ME$ von E_3 hergestellt.

1.4 Gegeben:

variabler Kostenvektor $\overrightarrow{k_V} = (30 \;\; 15 \;\; 45)$; Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Berechnung der Gesamtkosten:

$K = \overrightarrow{k_V} \cdot \vec{p} + 500 = 300 + 300 + 900 + 500 = 2000$ €

Der Erlös soll $2000 \cdot 1{,}1 = 2200$ € betragen.

Der Erlösvektor sei $\vec{u} = (u_1 \;\; u_2 \;\; u_3)$
Das Verhältnis der variablen Herstellkosten der Endprodukte beträgt
$30:15:45 = 2:1:3$
Damit kann der Verkaufsvektor dargestellt werden durch:
$\vec{u} = (2u_2 \;\; u_2 \;\; 3u_2)$
Nun muss gelten: $\vec{u} \cdot \vec{p} = 2200$

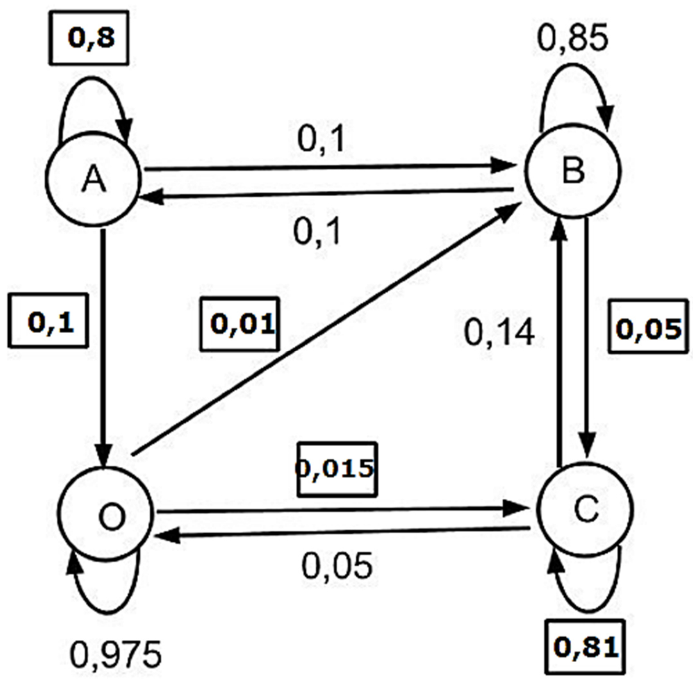
$(2u_2 \;\; u_2 \;\; 3u_2) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = 100u_2$

$100u_2 = 2200$ ➔ $u_2 = 22$ €

Der Verkaufspreisvektor lautet $\vec{u} = (44 \;\; 22 \;\; 66)$
Verkaufspreis von E_1 ist 44 €; Verkaufspreis von E_2 ist 22 €; Verkaufspreis von E_3 ist 66 €.

Lösung A2/2021

2.1



Die Befüllung der freien Felder erfolgte anhand der Einträge in der Matrix $\boldsymbol{M}$.

2.2 Interpretation des Wertes $0{,}14$:
$14\,\%$ der Mitglieder der Fitnesskette C wechseln innerhalb eines Jahres in die Fitnesskette B.

Zur Fitnesskette A kommen ausschließlich Kunden, die zuvor schon bei einer Kette angemeldet waren. Dies ist daran erkennbar, dass von O aus kein Pfeil zu A verläuft.

2.3 Anzahl der Mitglieder im Jahr 2021:
In den Ketten A, B, C sind im Jahr 2020 jeweils 1400 Mitglieder.
Ohne Mitgliedschaft sind $10000 - 3 \cdot 1400 = 5800$ Kunden.

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1400 \\ 1400 \\ 1400 \\ 5800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1260 \\ 1584 \\ 1291 \\ 5865 \end{pmatrix}$$

Im Jahr 2021 sind in A 1260 Mitglieder, in B 1584 Mitglieder und in C 1221 Mitglieder.

2.4 Gegeben ist der Verteilungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ b \\ 0{,}3 - b \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Bedingung: $\boldsymbol{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ b \\ 0{,}3 - b \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ b \\ 0{,}3 - b \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$$

1. Zeile mal 1. Spalte:
$0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot b + 0 + 0 = 0{,}1$
$0{,}08 + 0{,}1b = 0{,}1$
$0{,}1b = 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}2$
Die anderen Zeilen liefern für $b = 0{,}2$ ebenfalls wahre Aussagen.
Für die 10000 Kunden lautet die stabile Verteilung:

$$\vec{v} = 10000 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 02 \\ 0{,}1 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

2.5 Die Ausgangsverteilung lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x \\ 10000 - 4x \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}85 & 0{,}14 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}81 & 0{,}015 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x \\ 1000 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 0{,}05x + 0{,}81x + 150 - 0{,}06x \\ 0{,}2x + 0{,}05x + 9750 - 3{,}9x \end{pmatrix}$$

Es soll gelten: $0{,}05x + 0{,}81x + 150 - 0{,}06x = 950 \quad \Rightarrow \quad x = 1000$
Anzahl Kunden ohne Vertrag vorher: $10000 - 4 \cdot 1000 = 6000$
Anzahl Kunden ohne Vertrag nachher: $200 + 50 + 9750 - 3900 = 6100$
Die Anzahl der Kunden ohne Vertrag hat um $\frac{100}{6000} \approx 0{,}017$, also um ca. $1{,}7\ \%$ zugenommen.