*Abituraufgaben Analysis BG* (*ohne Hilfsmittel*) *Musteraufgaben*

## Aufgabe A1

1.1 Erläutere anhand einer Skizze, ob das Integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} sin\,(x)dx$$

größer, kleiner oder gleich Null ist.

1.2 Für eine Funktion gilt:

(1) $f'(x) = 0$ für $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

(2) $f''(-2) = -3$

(3) $f''(1) = 3$

(4) $f(-2) = \frac{19}{3}$

(5) $f(1) = \frac{11}{6}$

Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild von $f$ treffen? **4P**

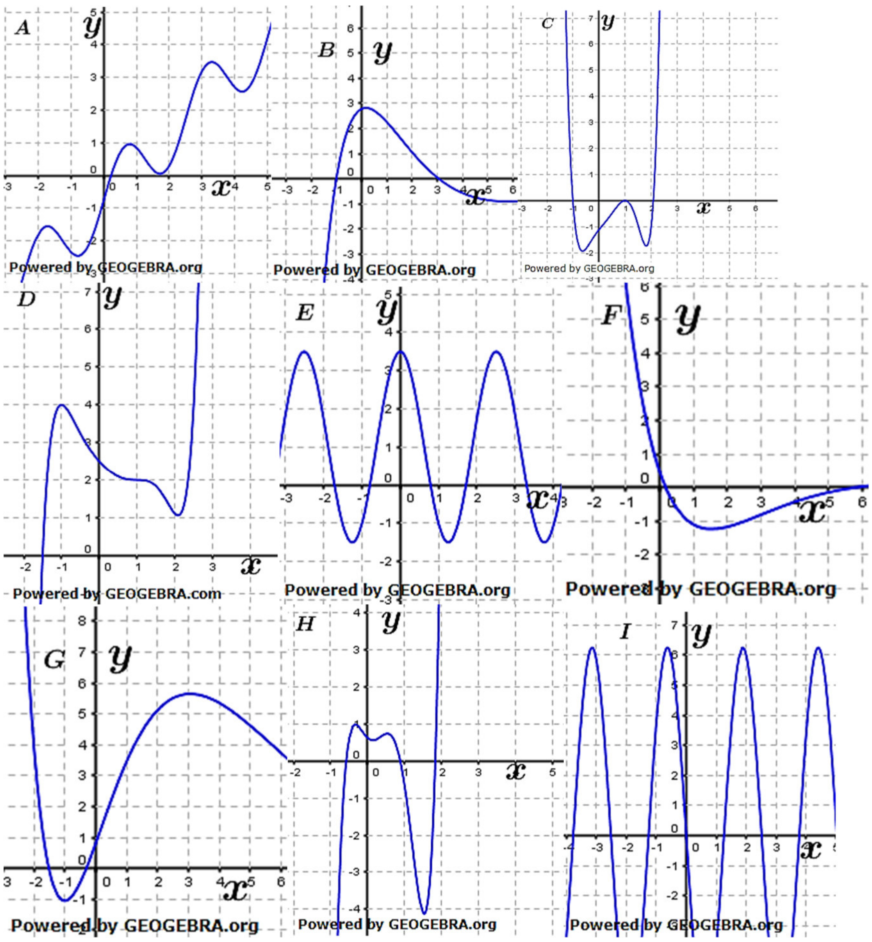
1.3 Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = cos(2x)$; $x \in \mathbb{R}$

Gib die Periode von $f$ an.

Bestimme eine Lösung der Gleichung $cos(2x) = -1$. **4P**

1.4 Die Abbildungen zeigen Schaubilder von drei Funktionen sowie deren zugehörigen ersten und zweiten Ableitungen. **5P**

Ordne jeweils dem Schaubild der Funktion das Schaubild seiner ersten und zweiten Ableitung zu.



*Abituraufgaben Analysis BG (ohne Hilfsmittel) Musteraufgaben*

## Aufgabe A2

1.1 Die Funktion $f$ ist gegeben durch **3P**

$f(x) = \frac{1}{2} sin(2x) - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$

Berechne die Gleichung der Tangente an das Schaubild von $f$ im Schnittpunkt mit der $y$-Achse.

1.2 Erläutere eine Vorgehensweise zum näherungsweisen Lösen der Gleichung $x^3 = x + 1$. **3P**

1.3 Das Schaubild einer Polynomfunktion $3$. Grades verläuft durch den Ursprung und hat in $P(-2|4)$ einen Wendepunkt. Die Wende -tangente schneidet die $x$-Achse in $Q(4|0)$. **4P**
Tina notiert folgende Bedingungen zur Bestimmung des Funktionsterms:

- $p(0) = 0$
- $p''(-2) = 0$
- $p(-2) = 4$
- $p(4) = 0$

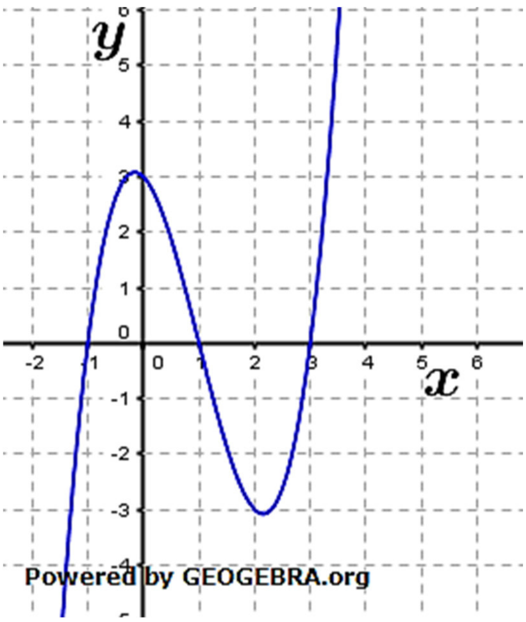
Begründe, dass Tina die Informationen im Aufgabentext nicht richtig übersetzt hat.

1.4 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion $g$. **5P**
Ordne die folgenden Integralwerte der Größe nach zu. Begründe.

(A) $\int_0^3 g(x)\,dx$

(B) $\int_{-1}^1 g(x)\,dx$

(C) $\int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx$

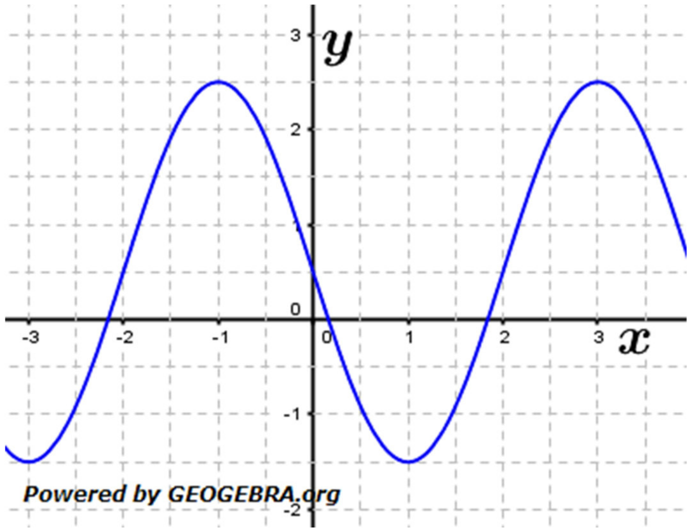


Abituraufgaben Analysis BG *(ohne Hilfsmittel)* Musteraufgaben

## Aufgabe A3

1.1 Gegeben ist das folgende Schaubild einer Funktion: **6P**
Untersuche, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe deine Entscheidung.

a) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = 0$ ist negativ.
b) Der Funktionswert an der Stelle $x = -2$ ist positiv.
c) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = -3$ ist null.
d) Der Wert der zweiten Ableitung an der Stelle $x = 3$ ist positiv.




1.2 Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 6x;\ x \in \mathbb{R}$. **4P**
Berechne, an welchen Stellen das zugehörige Schaubild $K$ eine waagrechte Tangente aufweist.

1.3 Die Funktion $g$ hat die Eigenschaften: $g(3) = 0$ und $\int_0^6 g(x)\ dx = 0$. **4P**
Skizziere ein mögliches Schaubild von $g$ und begründe deine Vorgehensweise.

1.4 Das Schaubild der trigonometrischen Funktion ist symmetrisch zur $y$-Achse, verläuft durch den Punkt $S(0|3)$ und hat in $T(3|0)$ einen Tiefpunkt. Gib einen möglichen Funktionsterm an. **3P**

## Aufgabe A4

1.1 Erläutere anhand einer Skizze, ob das Integral $\int_0^{\pi} cos(x)\ dx$ größer, kleiner oder gleich Null ist. **3P**

1.2 Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Schaubild der Funktion $f$ mit $f(x) = sin(x) + x$ bei $x = \pi$ einen Sattelpunkt aufweist. **4P**

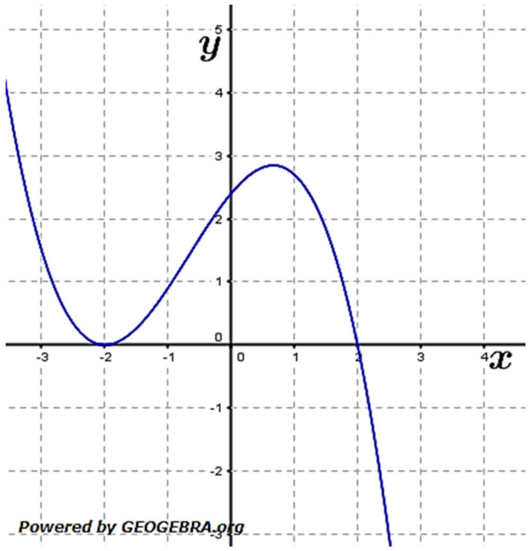
1.3 Gegeben ist die Funktion $g$ durch $g(x) = 3 \cdot e^{-x};\ x \in \mathbb{R}$. **4P**
Das Schaubild von $g$, die beiden Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 4$ begrenzen eine Fläche.
Berechne den Inhalt dieser Fläche.

1.4 Die folgende Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion $h$. **5P**
Überprüfe, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründe.

a) Die erste Ableitung von $h$ nimmt für $0 < x < 2$ nur positive Werte an.

b) $3 < \int_0^2 h(x)\,dx < 6$

c) Die zweite Ableitung von $h$ wechselt im Bereich $-2 < x < 1$ das Vorzeichen von plus nach minus.




1.5 Bilde die Ableitung der Funktion $f$ mit $f(x) = (5x+1) \cdot e^{2x}; x \in \mathbb{R}$. **2P**

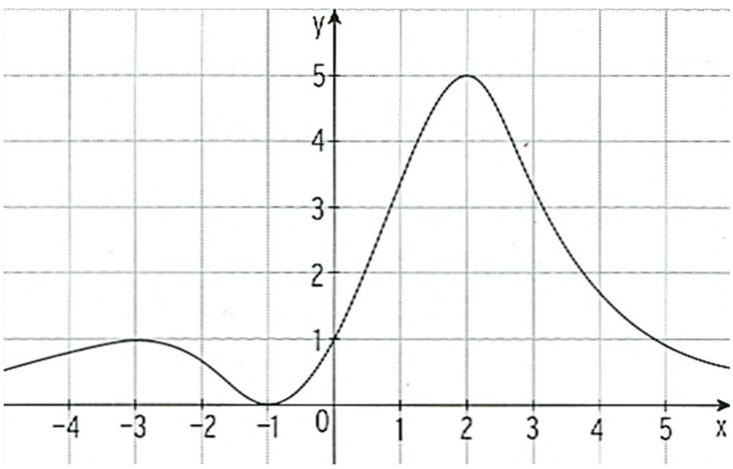
## Aufgabe A5

1.1 Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = sin\left(\frac{1}{2}x\right);\; x \in \mathbb{R}$ **3P**
Gib die Periode von $f$ an.
Bestimme eine Lösung der Gleichung $sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -1$.

1.2 Das Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades ist symmetrisch zur $y$-Achse, schneidet diese bei $y = -1$ und hat im Punkt $H(3|0)$ eine waagrechte Tangente. **6P**
Bestimme den Funktionsterm.

1.3 Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $-x^2 + 2 = e^x$? **3P**
Begründe.

1.4 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds der Funktion $h$. **8P**



Abituraufgaben Analysis BG *(ohne Hilfsmittel)* Musteraufgaben

Begründen Sie, warum die folgenden Aussagen wahr sind:

- Das Schaubild von $h$ besitzt eine Wendetangente, deren Steigung größer als eins ist.
- $h'(1) \cdot h'(3) < 0$
- $\int_1^3 h(x)\,dx < 10$
- Jede Stammfunktion von $h$ ist im Intervall $[0; 4]$ streng monoton steigend.

## Aufgabe A6

1.1 Gegeben sind die folgenden Abbildungen mit Schaubildern zweier Funktionen: **4P**

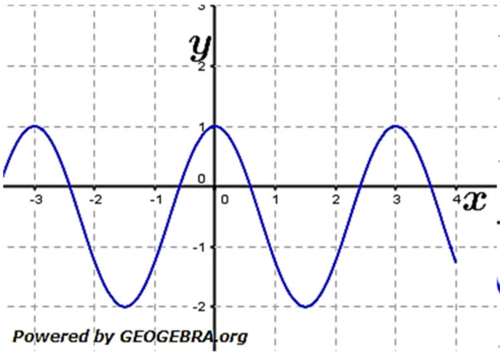



Abb. 1

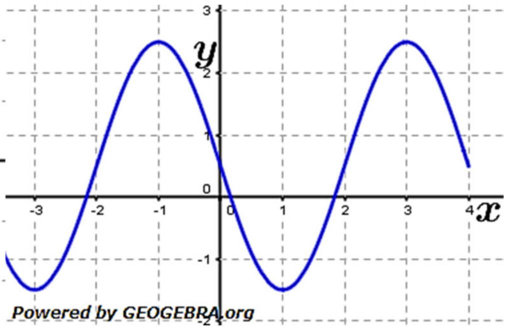



Abb. 2

Eine der beiden Abbildungen stellt das Schaubild der Gleichung $y = a\cos(kx) + b$ dar.
Begründen Sie, welche das ist und bestimmen Sie $a$, $b$ und $k$.

1.2 Erna bereitet sich auf die anstehende Mathematikprüfung vor. **3P**
In ihrem Heft findet sie folgende Aufschrieb:

$u(x) = v(x)$

$2\cos(x) + 3 = -2\cos(x) + 1$

$4\cos(x) = -2$

$\cos(x) = -0{,}5$

$x = \frac{2}{3}\pi$

$A = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (2\cos(x) + 3 - (-2\cos(x) + 1)\,dx = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$

Formuliere eine passende Aufgabenstellung.

1.3 Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = e^{-x};\ x \in \mathbb{R}$. **5P**
$K$ ist das Schaubild von $f$.
Die Tangente und Normale an $K$ im Punkt $S(0|1)$ begrenzen zusammen mit der $x$-Achse ein Dreieck.
Begründen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

1.4 Die folgende Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion $g$. **6P**

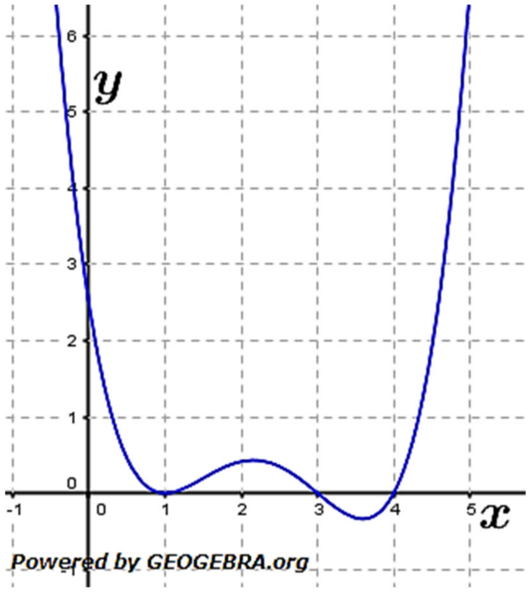
Das Schaubild einer Stammfunktion $G$ von $g$ ist $C_g$.

Begründe für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(1) $g''(2) > 0$

(2) Im Intervall $[-1; 4{,}5]$ gibt es drei Stellen, an denen das Schaubild $C_g$ die Steigung $4$ hat.

(3) $\int_2^4 g(x)\,dx < 1$




## Aufgabe A7

1.1 Die Funktion $f$ ist gegeben durch $f(x) = e^{2x} - 1;\ x \in \mathbb{R}$. **3P**

Berechne die Gleichung der Tangente an das Schaubild von $f$ im Schnittpunkt mit der $x$-Achse.

1.2 Das Schaubild $P$ einer Polynomfunktion dritten Grades hat den Wendepunkt $W(-4|-4)$ und bei $x = -2$ einen Extrempunkt. **5P**

Die Normale von $P$ in $W$ schneidet die $x$-Achse an der Stelle $x = 8$.

Gib so viele mathematische Bedingungen an, wie zur Ermittlung des zugehörigen Funktionsterms durch ein lineares Gleichungssystem benötigt werden.

1.3 Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $h$ gegeben durch **5P**

$h(x) = ax(x+1)^n(x+3);\ x \in \mathbb{R}$.

Martin behauptet, dass sich bei geeigneter Wahl von $a$ und $n$ die skizzierten Schaubilder ergeben.

Prüfe diese Behauptung für jedes der folgenden Schaubilder und ermittle gegebenenfalls die passenden Werte für $a$ und $n$.

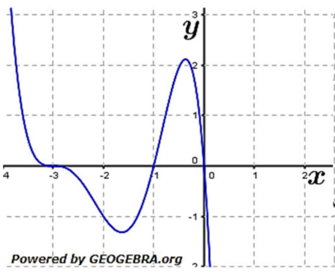


Abb. 1

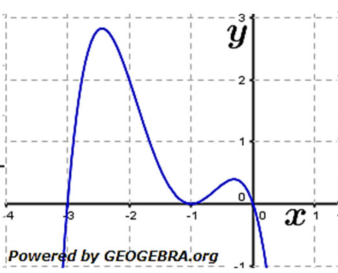


Abb. 2

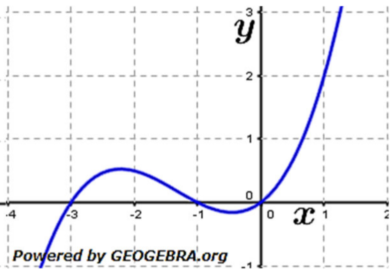


Abb. 3

1.4 $C$ ist das Schaubild einer Funktion g. Die Abbildung zeigt das Schaubild $C'$ der Ableitungsfunktion $g'$ von $g$ für $-2{,}5 \leq x \leq 3{,}5$. **7P**

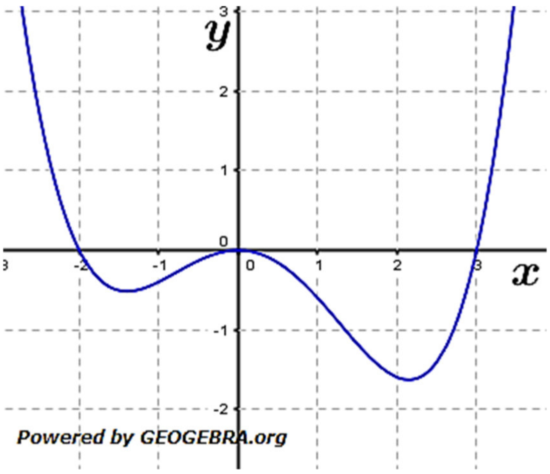
Begründe, wieso die folgenden Aussagen falsch sind.

(1) $C$ hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.

(2) $C$ hat genau zwei Wendepunkte.

(3) $C$ ist bei $x = -2$ linksgekrümmt.

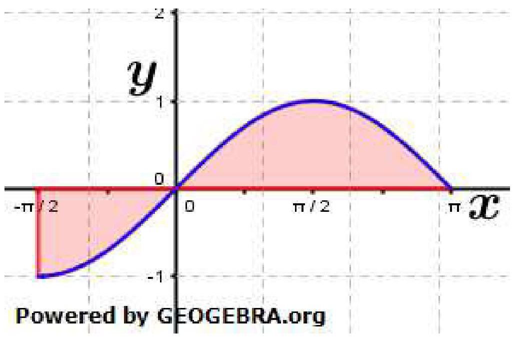
(4) $C$ hat an höchstens $2$ Punkten eine waagrechte Tangente.



*Abituraufgaben Analysis BG (ohne Hilfsmittel) Musteraufgaben*

## Lösung A1

1.1 Das Integral $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} sin(x)\,dx$ ist größer als Null, da die Fläche die der Graph der $sin$-Funktion oberhalb der $x$-Achse größer ist als die Fläche unterhalb der $x$-Achse.




1.2 Aussagen über das Schaubild von $f$ sind:
Das Schaubild besitzt den Hochpunkt $H\left(-2\middle|\frac{19}{3}\right)$
(wegen $f(-2) = \frac{19}{3} \wedge f'(-2) = 0 \wedge f''(-2) = -3$)
Das Schaubild besitzt den Tiefpunkt $T\left(1\middle|\frac{11}{6}\right)$
(wegen $f(1) = \frac{11}{6} \wedge f'(1) = 0 \wedge f''(1) = 3$)

1.3 $f(x) = cos(2x)\,;\ x \in \mathbb{R}$
$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$
Die Periode von $f$ ist $\pi$.
$cos(2x) = -1$
$cos(\pi) = -1 \implies 2x = \pi \implies x_0 = \frac{\pi}{2}$
(Hinweis: wegen des Aufgabentextes „Bestimmen Sie *eine* Lösung" sind weitere Angaben nicht erforderlich.)

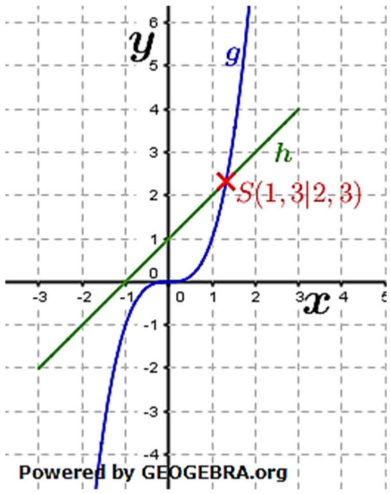
1.4

| | Schaubild von $f$ | Schaubild von $f'$ | Schaubild von $f''$ |
|---|---|---|---|
| 1. | $A$ | $E$ | $I$ |
| 2. | $D$ | $C$ | $H$ |
| 3. | $G$ | $B$ | $F$ |

## Lösung A2

1.1 $f(x) = \frac{1}{2}sin(2x) - 1$ $\qquad f(0) = -1$
$f'(x) = cos(2x)$ $\qquad f'(0) = 1$
$t(x) = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$
$t(x) = x - 1$
Die Gleichung der Tangente in $S_y(0|-1)$ ist $t(x) = x - 1$.

1.2 Die Lösung kann z. B. graphisch als Nullstelle eines Graphen $g$ mit $g(x) = x^3 - x - 1$ bestimmt werden. Mit der Eingabe dieser Funktion in den Funktionsspeicher des WTR kann dann über die Tabelle nach der/den Nullstellen gesucht werden.
Alternativ kann man die Schnittpunkte zweier Graphen der Funktionen $g$ mit $g(x) = x^3$ und $h$ mit $h(x) = x + 1$ bestimmen. Aus der seitlichen Grafik ist erkennbar, dass es nur einen Schnittpunkt gibt, d.h., die Gleichung hat nur eine Lösung.
Der $x$-Wert des Schnittpunktes ist die Lösung der Gleichung.




1.3 Die ersten drei Bedingungen entsprechen den Informationen im Text:
- $p(0) = 0$ $\qquad K$ verläuft durch den Ursprung
- $p''(-2) = 0$ $\qquad K$ hat bei $x = -2$ eine Wendestelle
- $p(-2) = 4$ $\qquad K$ verläuft durch den Punkt $P(-2|4)$

Die vierte Bedingung $p(4) = 0$ ist falsch. Im Text ist $Q(4|0)$ Punkt der Wendetangente und nicht Punkt der Polynomfunktion.

1.4 Der kleinste Integralwert ist $\int_0^3 g(x)\,dx$. Die positive Fläche im Intervall $[0;1]$ ist kleiner als die negative Fläche im Intervall $[1;3]$, damit gilt $\int_0^3 g(x)\,dx < 0$.

Der mittlere Integralwert ist $\int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx$. Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Punkt $P(1|0)$, d.h., das Integral $\int_{-1}^{3} g(x)\,dx = 0$, sodass der Wert des Integrals $\int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx$ gleich dem Wert des Integrals $\int_{3}^{3,5} g(x)\,dx$ entspricht. $\int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx > 0$.

Den größten Wert besitzt $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$, da der Graph der Funktion im Intervall $[-1;1]$ausschließlich oberhalb der $x$-Achse verläuft. Somit ist $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx > \int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx$. Insgesamt gilt:
(A)<(C)<(B)

*Abituraufgaben Analysis BG* (ohne Hilfsmittel) *Musteraufgaben*

## Lösung A3

1.1 a) Die Aussage ist richtig. Das Schaubild hat an der Stelle $x = 0$ negativ Steigung.

b) Die Aussage ist richtig. Das Schaubild hat an der Stelle $x = -2$ den Funktionswert $0{,}5$.

c) Die Aussage ist richtig. Das Schaubild hat an der Stelle $x = -3$ einen Tiefpunkt.

d) Die Aussage ist falsch. Das Schaubild ist an der Stelle $x = 3$ rechtsgekrümmt, damit ist die zweite Ableitung an dieser Stelle negativ.

1.2 Waagrechte Tangenten mit $f'(x) = 0$.

$f'(x) = x^4 + x^2 - 6$

$x^4 + x^2 - 6 = 0$

$x_{1,2}^2 = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6} = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = -0{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1^2 = 2; \quad x_2^2 = -3$

$x_1^2 = 2 \qquad | \quad \sqrt{\ }$

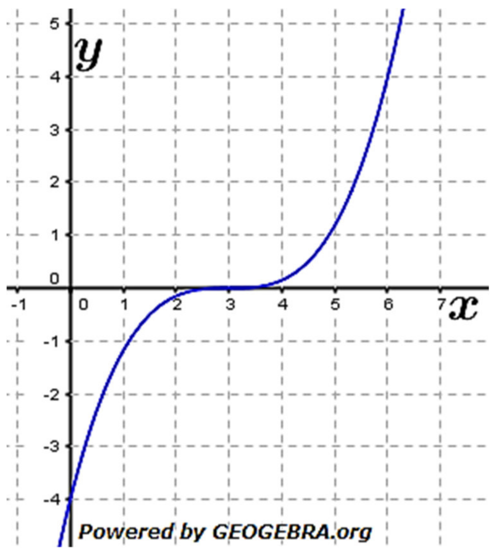
$x_1 = \sqrt{2}; \quad x_2 = -\sqrt{2}$

$x_2^2 = -3$ hat keine Lösung.

*Das zugehörige Schaubild hat an den Stellen $x_1 = \sqrt{2}$ und $x_1 = -\sqrt{2}$ waagrechte Tangenten.*

1.3 $g(3) = 0$ ist eine Nullstelle bei $x = 3$. Da $\int_0^6 g(x)\ dx = 0$ sein soll, muss z. B. die Fläche, die das Schaubild im Intervall $I = [0; 3]$ unterhalb der $x$-Achse mit der $x$-Achse einschließt, genauso groß sein wie die Fläche, die das Schaubild im Intervall $I = [3; 6]$ oberhalb der $x$-Achse mit der $x$-Achse einschließt. Dies kann beispielsweise über das folgende Polynom dritten Grades dargestellt werden:

$g(x) = \frac{4}{27}(x-3)^3$




1.4 Die Kosinusfunktion ist symmetrisch zur $y$-Achse. Somit muss $S$ ein Hoch- und $T$ ein Tiefpunkt sein. Hieraus errechnet sich die Amplitude $a$:

$a = \frac{y_{HP} - Y_{TP}}{2} = \frac{3-0}{2} = 1{,}5$

Verschiebung $d$ in $y$-Richtung:

$d = \frac{y_{HP} + Y_{TP}}{2} = \frac{3+0}{2} = 1{,}5$

Periode $p$:

$p = 2 \cdot (x_{TP} - x_{HP}) = 2 \cdot (3 - 0) = 6$

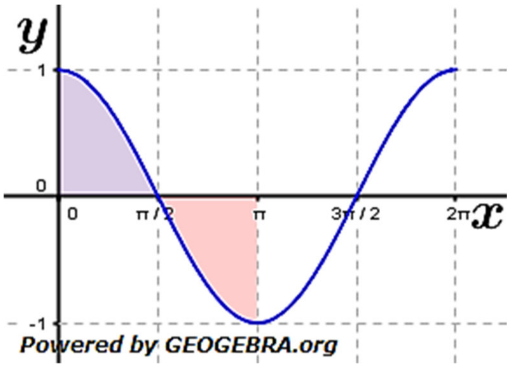
$b = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Ein möglicher Funktionsterm lautet:

$f(x) = 1{,}5\,cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1{,}5$

## Lösung A4

1.1 $\int_0^{\pi} cos(x)\ dx = 0$.
Wie aus der Grafik ersichtlich, ist die Fläche oberhalb der $x$-Achse im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ gleich groß wie die Fläche unterhalb der $x$-Achse im Intervall $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.




1.2 Nachweis Sattelpunkt mithilfe $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$:
$f'(x) = cos(x) + 1$
$f''(x) = -sin(x)$
$f'''(x) = -cos(x)$
$f'(\pi) = cos(\pi) + 1 = -1 + 1 = 0$
$f''(\pi) = -sin(\pi) = 0$
$f'''(\pi) = -cos(\pi) \neq 0$
Alle Bedingungen sind erfüllt, das Schaubild von $f$ hat bei $x = \pi$ einen Sattelpunkt.

1.3 $A = \int_0^4 3 \cdot e^{-x} dx = [-3 \cdot e^{-x}]_0^4 = -3e^{-4} - (-3e^0) = 3 - \frac{3}{e^4}$

1.4 a) Die Aussage ist falsch. Das Schaubild hat im Bereich $0 < x < 2$ einen Hochpunkt, somit hat die erste Ableitung dort eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel.
b) Die Aussage ist richtig, die Fläche unter dem Schaubild im Intervall $0 \leq x \leq 2$ ist größer als $3$ und kleiner als $6$ Flächeneinheiten.
c) Die Aussage ist richtig, das Schaubild hat im Intervall $-2 < x < 1$ einen Wendepunkt, in dem sich die Krümmung von linksdrehend auf rechtsdrehend ändert.

1.5 Produktregel erforderlich.
$u = 5x + 1$ $\quad u' = 5$
$v = e^{2x}$ $\quad v' = 2e^{2x}$
$f'(x) = u'vb + v'u = 5e^{2x} + 2(5x + 1)e^{2x} = e^{2x}(5 + 10x + 2) = e^{2x}(10x + 7)$

## Lösung A5

1.1 $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
$sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -1$
Der Sinus ist bei $\frac{3}{2}\pi = -1$. Wenn in der Klammer nicht $\frac{3}{2}\pi$ steht, ist der Ausdruck nicht $-1$.
$\frac{1}{2}x = \frac{3}{2}\pi \Longrightarrow \ x = 3\pi$

1.2 Wegen Symmetrie mit der $y$-Achse gilt: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

Umständliche Lösung:

Bedingungen aus Text ablesbar:

$f(0) = -1$, $f(3) = 0$ sowie $f'(3) = 0$.

$f(0) = -1 \Longrightarrow \quad c = -1$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

| | | |
|---|---|---|
| (I) | $81a + 9b - 1 = 0$ | $\cdot 6$ |
| (II) | $108a + 6b = 0$ | $\cdot 9$ |
| (I) | $486a + 54b = 6$ | |
| (II) | $972a + 54b = 0$ | |
| (II)-(I) | $486a = -6$ | $\cdot 486$ |
| | $a = -\frac{1}{81}$ | |

$a \longrightarrow$(I)

| | | |
|---|---|---|
| | $-\frac{1}{81} \cdot 81 + 9b - 1 = 0$ | |
| | $9b = 2$ | $:2$ |
| | $b = \frac{2}{9}$ | |

$f(x) = -\frac{1}{81}x^4 + \frac{2}{9}x^2 - 1$

Einfache Lösung:

$f(3) = 0$ und $f'(3) = 0$ bedeutet Berührpunkt mit der $x$-Achse, also doppelte Nullstelle. Wegen der Symmetrie ist $x = -3$ ebenfalls eine doppelte Nullstelle. Somit lautet die Funktionsgleichung:

$f(x) = a(x-3)^2 \cdot (x+3)^2$

Punktprobe mit $f(0) = -1$

$-1 = a \cdot 9 \cdot 9 \Longrightarrow \quad a = -\frac{1}{81}$

$f(x) = -\frac{1}{81}\big((x-3)(x+3)\big)^2 = -\frac{1}{81}(x^2-9)^2$

$f(x) = -\frac{1}{81}x^4 + \frac{2}{9}x^2 - 1$

1.3 $-x^2 + 2 = e^x$ besitzt genau zwei Lösungen. Zum einen ist $e^x$ streng monoton steigend ist, zum anderen ist $-x^2 + 2$ eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel $S(0|2)$, der oberhalb dem Schnittpunkt $S_y(0|1)$ von $e^x$ mit der $y$ -Achse liegt.

1.4

- Das Schaubild hat bei $x = -1$ einen Tief- und bei $x = 2$ einen Hochpunkt. Dazwischen liegt ein Wendepunkt mit einer Steigung größer eins.
- $h'(1) \cdot h'(3) < 0$
  Die Steigung von $h$ bei $x = 1$ ist positiv, die bei $x = 3$ negativ, somit ist $h'(1) \cdot h'(3) < 0$.
- $\int_1^3 h(x)\,dx < 10$
  Die Fläche unter dem Schaubild von $h$ im Intervall $[1;3]$ ist kleiner als $10$, Ablesen von Kästchen im Schaubild.
- Das Schaubild von $h$ verläuft im Intervall $[0;4]$ oberhalb der $x$-Achse, somit ist jede Stammfunktion von $h$ in diesem Intervall streng monoton steigend.

## Lösung A6

1.1 Abbildung 1 stellt das Schaubild mit der Gleichung $y = acos(kx) + b$ dar.

$a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{1-(-2)}{2} = 1{,}5$

$b = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{1-2}{2} = -0{,}5$

$k = \frac{2\pi}{p}$

$p = x_{HP_2} - x_{HP_1} = 3 - 0 = 2$

$k = \frac{2}{3}\pi$

$y = 1{,}5\,cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right) - 0{,}5$

1.2 Die Funktionen $u$ mit $u(x) = 2cos(x) + 3$ und $v$ mit $v(x) = -2\cos(x) + 1$ schließen zwischen der $y$-Achse und dem kleinsten positiven Schnittpunkt eine Fläche ein. Berechne deren Inhalt exakt.
Zum Verständnis (nicht Gegenstand eines Klausuraufschriebs):
Über die Gleichsetzung $u(x) = v(x)$ wird der kleinste positiver Schnittpunkt der beiden Funktionen ermittelt. Danach wird die Fläche berechnet aus dem Integral „Obere Kurve minus untere Kurve", also $\int_0^{x_S}(u(x) - v(x))\,dx$.

1.3 $t(x) = f'(0) \cdot x + f(0)$

$n(x) = -\frac{1}{f'(0)} \cdot x + f(0)$

$f'(x) = -e^{-x}$

$f'(0) = -1$

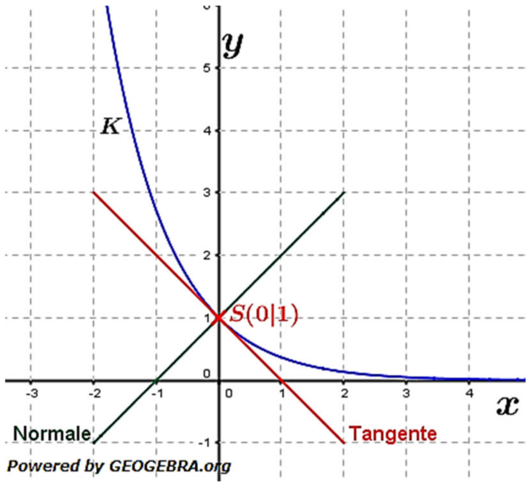
$f(0) = 1$

$t(x) = -x + 1$

$n(x) = x + 1$

$t(x) = 0 = -x + 1 \implies x_{t_0} = 1$

$n(x) = 0 = x + 1 \implies x_{t_n} = -1$




Die beiden Nullstellen von $t$ und $n$ liegen symmetrisch zur $y$-Achse. Die beiden Nullstellen bilden zusammen mit dem Punkt $S(0|1)$ ein Dreieck, welches symmetrisch zur $y$-Achse ist und damit auch gleichschenklig.

1.4 (1) Die Aussage ist falsch. $g$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ rechtsdrehend, somit ist $g''(2) < 0$.

(2) Die Aussage ist falsch. An der Grafik lesen wir ab, dass $g$ bei etwa $x = -0{,}2$ und $x = 4{,}8$ den Funktionswert $4$ hat, also hat $C_g$ bei $x = -0{,}2$ und $x = 4{,}8$ die Steigung $4$, somit im vorgegebenen Intervall nur einmal die Steigung $4$.

(3) Die Aussage ist richtig. Die Fläche unter $g$ im Intervall $[2; 3]$ ist nur geringfügig größer als die Fläche unter $g$ im Intervall $[3; 4]$, damit ist die Differenz der beiden Flächen kleiner als $1$.

Abituraufgaben Analysis BG *(ohne Hilfsmittel)* Musteraufgaben

## Lösung A7

1.1 $t(x) = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$

Berechnung der Nullstelle:

$f(x) = e^{2x} - 1 = 0$

$e^{2x} = 1 \;\Rightarrow\; x = 0$

$f'(x) = 2e^{2x}$

$f'(0) = 2; \quad f(0) = 0$

$t(x) = 2 \cdot (x-0) = 2x$

1.2 Polynomfunktion dritten Grades: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Wir benötigen insgesamt 4 Bedingungen zur Aufstellung eines LGS.

Aus dem Text lesen wir ab:

| | | |
|---|---|---|
| (1) $p(-4) = -4$ | \| | Punktprobe mit $W(-4\|-4)$ |
| (2) $p''(-4) = 0$ | \| | $W$ ist Wendepunkt |
| (3) $p'(-2) = 0$ | \| | Extrempunkt bei $x = -2$ |
| (4) $p'(-4) = -\frac{1}{m_n}$ | \| | Steigung der Tangente in $W$ |
| $m_n$: | | |
| $m_n = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-4-0}{-4-8}$ | \| | Normale durch $W(-4\|-4)$ und |
| $= \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}$ | \| | $Q(8\|0)$ |
| (4) $p'(-4) = -3$ | | |

1.3 Abbildung 1 kann nicht durch Martins Formel dargestellt werden, da bei $x = -3$ eine dreifache Nullstelle besteht, das Formelglied $(x+3)$ jedoch keinen Exponenten hat.

Für Abbildung 2 gilt: $-x(x+1)^2(x+3)$

Für Abbildung 3 gilt: $0{,}25x(x+1)(x+3)$

1.4 (1) $C'$ hat in $x = -2$ eine Nullstelle mit VZW von + nach −, also hat $C$ an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.

(2) $C'$ hat im dargestellten Intervall $3$ Extremstellen, also hat $C$ im Intervall $3$ Wendepunkte.

(3) $C'$ hat in $x = 1$ negative Steigung. Damit ist $C''$ in $x = 1$ negativ und somit $C$ an dieser Stelle rechtsgekrümmt.

(4) $C'$ hat im dargestellten Intervall $2$ Nullstellen mit Vorzeichenwechsel und eine doppelte Nullstelle in $x = 0$. Somit hat $C$ drei Stellen mit waagrechter Tangente, zwei Extremstellen bei $x = -2$ und $x = 3$ sowie einen Sattelpunkt bei $x = 0$.